תכנית הלימודים ברמה של 4 יח"ל

כיתה י"א

פונקציות וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי – כיתה י"א (לפחות 45 שעות)

מבוא

בנושא פונקציות וחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי יש שני פרקים:

- פרק הפונקציות מהווה מבוא לחשבון הדיפרנציאלי של פונקציות רציונליות (מנה של פולינומים). פרק זה עוסק בהתנהגות פונקציות מהצורה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ ללא שימוש בכלים של החשבון הדיפרנציאלי. יושם דגש על זיהוי וניתוח פונקציות באופן איכותני.
מומלץ לשלב אמצעים טכנולוגיים בלימוד פרק זה.

- פרק החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי. פרק זה מחולק לשלושה חלקים:
  * חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מנה ושורש – פונקציית השורש הריבועי כהמשך למה שנלמד בכיתה י', פונקציות רציונליות ושילובים של פונקציות רציונליות עם פונקציית השורש.
  * שאלות ערך הקיצון
  * חשבון אינטגרלי. מציאת פונקציה קדומה וחישוב שטחים בין גרפים של פונקציות.

פונקציות (לפחות 4 שעות)

תכנים

נדון בפונקציה מהצורה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, כאשר $f(x)$ הוא פולינום ממעלה שנייה לכל היותר.

- תכונות הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, תחום הגדרה, אסימפטוטות המאונכות לצירים, העדר נקודות אפס, נקודות קיצון.
- קשר בין $f(x)$ לבין $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, כאשר $f(x)$ הוא פולינום ממעלה שנייה לכל היותר.
- שרטוט פונקציה מהצורה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$, כאשר הפונקציה $f(x)$ נתונה בצורה אלגברית או בצורה גרפית
- טרנספורמציות של הפונקציה $g(x)=\frac{1}{f(x)}$: הזזה אנכית, הזזה אופקית, שיקוף, מתיחה / כווץ.

  כלומר, פונקציות מהצורה:

  * הזזה אופקית: פונקציות מהצורה: $g(x)=\frac{1}{f(x-p)}$, p חיובי או שלילי
  * הזזה אנכית: פונקציות מהצורה $y=\frac{1}{f(x)}+k$, k חיובי או שלילי
  * שיקוף ביחס לציר ה- x: פונקציות מהצורה: $y=-\frac{1}{f(x)}$
  * מתיחה / כיווץ: פונקציות מהצורה: $y=\frac{a}{f(x)}$
  * שילובים שונים של הטרנספורמציות: פונקציות מהצורה: $g(x)=\frac{a}{f(x-p)}+k$

חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (לפחות 41 שעות)

בנוסף לפיתוח הכישורים הטכניים הקשורים בחקירת פונקציות מהסוגים המפורטים בהמשך באמצעות הנגזרת שלהן, בפרק זה יינתן ביטוי לשילוב ייצוגים שונים לפונקציות ונגזרותיהן: גרפי, סימבולי ומספרי.

הרחבת מאגר הפונקציות והפעולות הנעשות עליהן ירחיב את האפשרויות לפתרון בעיות מעשיות מתחומים רבים.

השימוש בטכנולוגיה תורם להטמעת החומר הנלמד.

מטרות על

- הבנת המבנה והתכונות של הפונקציות הרציונליות.
- הכרת האסימפטוטות המאונכות לצירים של הפונקציות הרציונליות ודרך מציאתן.
- הכרת הנגזרת של פונקציה רציונלית.
- שימוש בנגזרת של פונקציה רציונלית ככלי מתמטי למציאת משוואת משיק, לחקירת פונקציות ולפתרון שאלות ערך קיצון עבור פונקציות רציונליות.
- פונקציות רציונליות בשילוב עם פונקציית שורש ריבועי ופונקציות שנלמדו בכיתה י'.
- הבנת הקשר בין פונקציה לפונקציית הנגזרת שלה עבור פונקציות רציונליות, פונקציות רציונליות בשילוב עם פונקציית שורש ריבועי ופונקציות שנלמדו בכיתה י'**.**

חשבון דיפרנציאלי של פונקציות מנה ושורש (לפחות 21 שעות)

תכנים

- עיסוק פונקציות מהסוגים הבאים :
  * פונקציות מנה מהצורה : $y=\frac{c}{(ax+b)^n}$, כאשר n שלם. $n\neq 1$, n שלם
  * פונקציות רציונלית $y=\frac{f(x)}{g(x)}$, כאשר $f(x)$ ו- $g(x)$ פולינומים ממעלה שנייה לכל היותר.
  * פונקציות מהצורה $y=g(x)\cdot\sqrt{f(x)}$, כאשר $f(x)$ ו- $g(x)$ פולינומים ממעלה שנייה לכל היותר.
  * פונקציות מהצורה $y=\frac{c}{\sqrt{f(x)}}$, כאשר $f(x)$ פולינום ממעלה שנייה לכל היותר.
- נגזרות של הפונקציות האלו.

- נגזרת של סכום והפרש של הפונקציות האלו עם הפונקציות שנלמדו בכתה י׳.
- תחום ההגדרה של הפונקציות האלו.
- שיפוע המשיק לגרף של פונקציות אלו בנקודה שעל הגרף.
- משוואת משיק לגרף של פונקציות אלו בנקודה שעליו.
- התנהגות בסביבת נקודות אי-הגדרה ואסימפטוטות מאונכות לציר ה- x (ללא נקודות סליקות).
- התנהגות של הפונקציות הרציונליות עבור $x \to \pm\infty$ (ברמה אינטואיטיבית בלבד), ואסימפטוטות מאונכות לציר ה- y.
- נקודות חיתוך של הגרפים של הפונקציות עם הצירים.
- חיוביות ושליליות של הפונקציות האלו כולל פתרון אי שוויונות מהסוג:
- $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$ $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$,, כאשר $f(x)$ ו- $g(x)$ פולינומים ממעלה שנייה לכל היותר.
- תחומי העלייה והירידה של הפונקציות האלו.
- נקודות קיצון פנימיות ונקודות קיצון בקצה תחום ההגדרה של הפונקציות האלו.
- סרטוט סקיצה של הגרף של כל אחת מהפונקציות האלו, במסגרת חקירה של פונקציה.
- זוגיות או אי-זוגיות של פונקציות אלו - באופן אלגברי ובאופן גרפי.
- הקשר בין הגרף של כל אחת מהפונקציות האלו לבין גרף הנגזרת שלהן.
- שימוש בפרמטרים: מציאת ערך פרמטר על סמך הנתון.

דגשים

- מומלץ להשתמש בטכנולוגיה במהלך הוראת הנושאים השונים. השימוש בטכנולוגיה מאפשר הצגה גרפית של פונקציות וחקירת תכונותיהן בבדיקה וסיוע לחקירה האנליטית. הטכנולוגיה מאפשרת לחקור באופן דינאמי השפעה של פרמטרים על פונקציות, להמחיש פעולות על פונקציות ולהגיע להכללות. השימוש בכלים הגרפיים מזמן שאילת שאלות איכותניות.

שאלות ערך קיצון (לפחות 10 שעות)

תכנים

- פתרון שאלות קיצון, בתחום פתוח ובתחום סגור, עבור פונקציות רציונליות ופונקציות שורש כמפורט לעיל.
- שאלות הקיצון יעסקו בבעיות מספרים, בעיות כלכליות, פונקציות וגרפים, בעיות גאומטריות במישור, בעיות גאומטריות במרחב - כולל נפח, שטח פנים ומעטפת של הגופים: קובייה, תיבה, מנסרה ישרה שבסיסה משולש, גליל ישר וחרוט ישר.

חשבון אינטגרלי (לפחות 10 שעות)

מטרות על

- היכרות עם מושג האינטגרל הלא מסוים כפעולה הפוכה לפעולת הנגזרת.
- הכרת אינטגרל מסוים ככלי לחישוב שטח בין גרפים של פונקציות.

תכנים

- אינטגרלים של פונקציות פולינום ופונקציות מנה מהצורה: $y=\frac{c}{(ax+b)^n}$, כאשר $n\neq 1$ שלם.
- מציאת פונקציה קדומה.
- מציאת פונקציה על פי הנגזרת ונקודה על גרף הפונקציה.
- אינטגרל מסוים.
- חישוב שטח בין גרף הפונקציה לציר x (הפונקציה יכולה להיות חיובית, שלילית או לשנות סימן).
- חישוב שטח בין גרפים של שתי פונקציות וחישוב שטחים מורכבים.

נספח: דוגמאות לשאלות על פי נושאי הלימוד

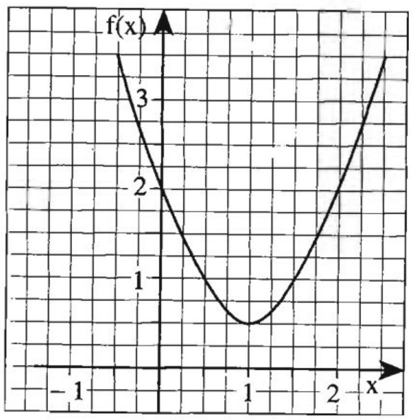
חלק א – דוגמאות בנושא התנהגות פונקציה

הדוגמאות מתוך המאגר הישן של 3 יח"ל, ע' 109, 110

דוגמה 1

נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + 7x - 12$. סרטט, במערכת צירים אחת, את הגרף של $f(x)$ ואת הגרף של $\frac{1}{f(x)}$.

דוגמה 2



נתון גרף של הפונקציה $f(x)$ בתחום $-0.5 \le x \le 2.5$.

א. רשום תחומי עלייה וירידה של $f(x)$ ושל $\frac{1}{f(x)}$.

ב. עבור אילו ערכי x יש ל- $f(x)$ ול- $\frac{1}{f(x)}$ אותו ערך?

ג. מה הן נקודות הקיצון המוחלטות של $f(x)$ ושל $\frac{1}{f(x)}$?

דוגמה 1

שאלון 804, קיץ תשע"ה, שאלה 6

)חקירת פונקציה רציונלית, הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת)

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-x^2+2x+3}{x^2}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. מצא את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון כי הפונקציה $g(x)$ מקיימת: $g'(x) = f(x)$.

($g'(x)$ ו־ $g(x)$ מוגדרות באותו תחום.)

העבירו משיקים לגרף הפונקציה $g(x)$ המקבילים לציר ה־ x .

מה הם שיעורי ה־ x של נקודות ההשקה של המשיקים האלה? נמק.

דוגמה 2

שאלון 804, קיץ תשע"ד מועד ב, שאלה 6

)חקירת פונקציה רציונלית, משוואת משיק)

נתונה הפונקציה $f(x) = 1 - \frac{1}{(x-5)^2}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x < 5$,

ומצא את הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $x > 5$.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = 4$.

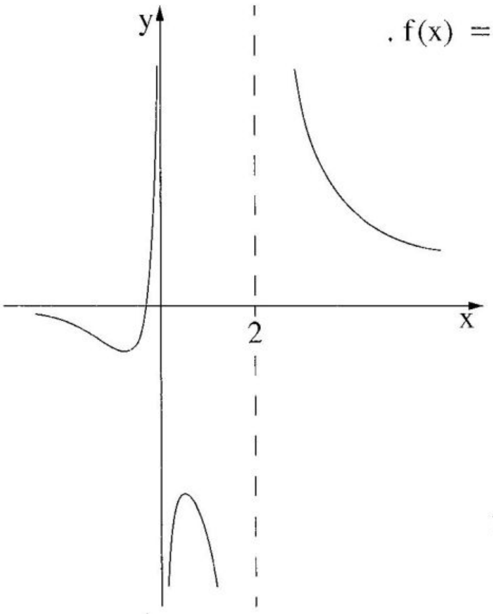
מצא את השיעורים של נקודות החיתוך של המשיק עם האסימפטוטות

של הפונקציה $f(x)$.

דוגמה 3

שאלון 804, קיץ תשע"ב, שאלה 7

)חקירת פונקציה רציונלית, הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת, שימוש בפרמטרים)



בציור שלפניך מוצג הגרף של הפונקציה $f(x) = \frac{4x+1}{ax^2-2x}$.

a הוא פרמטר.

א. מצא את הערך של a .

הצב $a = 1$, וענה על הסעיפים ב, ג, ד.

ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

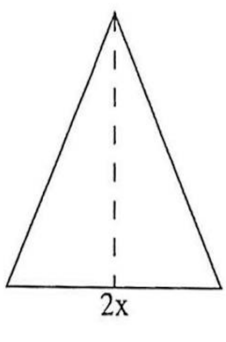
ד. (1) מה הן האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציית הנגזרת $f'(x)$?

(2) סרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 < x < 2$.

דוגמה 4

שאלון 804, קיץ תשע"ד מועד ג, שאלה 8

) בעיית קיצון גאומטרית הכוללת גזירת מכפלה של פולינום בשורש)



נתון משולש שווה־שוקיים שהיקפו 30 ס"מ.

א. סמן ב־ 2x את בסיס המשולש,

והבע באמצעות x את גובה המשולש לבסיס.

ב. מה צריך להיות x כדי ששטח המשולש יהיה מקסימלי?

ג. הראה כי המשולש שיש לו שטח מקסימלי

הוא משולש שווה־צלעות.

דוגמה 5

א. נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{x^2}$.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת האסימפטוטות של הפונקציה המאונכות לצירים.

(2) מצא את תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.

(3) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$.

(1) על סמך תוצאות הסעיף הקודם שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

(2) רשום את האסימפטוטות המאונכות לצירים של $f(x)$ ואת תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ג. העבירו משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

(1) רשום את משוואת המשיק.

(2) מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה $f(x)$, על ידי המשיק ועל ידי הישר $x=-1$.

ד. (1) אילו ערכים יכולה לקבל פונקציה $f(x)$? (אפשר גם בלעדיו?)

מגדירים פונקציה חדשה: $h(x)=\frac{1}{(x-2)^2}+a$.

(2) רשום דוגמה של מספר a שעבורו הפונקציה $h(x)$ מקבלת ערכים גדולים מ- 1 (או אפשר לרשום המקיימת $h(x)>1$ או תנאי אחר: האסימפטוטה האופקית שלה היא $y=\cdots$).

(3) העבירו משיק לגרף הפונקציה $h(x)$ בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

עבור a שמצאת בסעיף הקודם, האם השטח המוגבל על ידי $h(x)$, על ידי המשיק ועלי ידי הישר $x=-1$ הוא גדול, שווה או קטן משטח שחישבת בסעיף ג (2)? נמק.

גאומטריה – כיתה י"א (40 שעות)

כפי שהיה בתכנית הלימודים של כיתה י, שלושת תחומי הגאומטריה בתכנית : גאומטריה אוקלידית, טריגונומטריה וגאומטריה אנליטית, נלמדים בצורה משולבת.

גאומטריה אוקלידית

תכנים

מעגל

- הגדרות: מעגל כמקום גאומטרי, רדיוס, קוטר, קשת, מיתר, זווית מרכזית, זווית היקפית, מידה זוויתית של קשת (מדידת קשת באמצעות הזווית המרכזית הנשענת עליה), עיגול, גזרה, קשת קטנה / קשת גדולה המתאימות למיתר (בהסתמך על הזווית המרכזית).

משפטים:

- אנך למיתר, העובר דרך מרכז המעגל, חוצה את המיתר.
- ישר העובר דרך מרכז המעגל ואשר חוצה את המיתר, מאונך למיתר.
- ישר המאונך למיתר וחוצה את המיתר, עובר דרך מרכז המעגל.

- תכונות של זוויות היקפיות, זוויות מרכזיות, והקשר בין זווית היקפית לזווית מרכזית. תכונות הקשורות לקשתות, מיתרים, מרחקים ממרכז המעגל.

משפטים:

- במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.
- במעגל, אם שתי קשתות שוות זו לזו אז שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.
- במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם הם נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
- אנך למיתר, העובר דרך מרכז המעגל, חוצה את הזווית המרכזית / הקשת המתאימה למיתר.
- במעגל, זוויות היקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד שלו, שוות זו לזו.
- במעגל, זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת, שוות זו לזו.
- במעגל, לזוויות היקפיות שוות, מתאימות קשתות שוות ומיתרים שווים.
- במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.
- במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הקשת שעליה היא נשענת.
- במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.
- במעגל, זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).
- במעגל, זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.

משיקים למעגל

- הגדרה של משיק למעגל.
- תכונות של משיק למעגל.

משפטים:

- משיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
- ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.

- אם מנקודה מחוץ למעגל עוברים שני משיקים למעגל, אז קטעי המשיקים המחברים את הנקודה עם נקודות ההשקה שווים באורכם.
- אם שני משיקים מקבילים זה לזה, אז הקטע שמחבר את נקודות ההשקה הוא קוטר במעגל.

שני מעגלים

- מצב הדדי בין שני מעגלים: קביעת המצב ההדדי בין שני מעגלים בהתאם לקשר שבין אורכי הרדיוסים של שני המעגלים לבין המרחק בין שני המרכזים.

מצולע חסום במעגל (מעגל חוסם מצולע)

- מצולע חסום במעגל (מעגל חוסם מצולע) - הגדרה.
- משולש החסום במעגל (מעגל החוסם משולש)

משפטים:

* כל משולש ניתן לחסום במעגל.
* במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.
* דרך כל שלוש נקודות, שאינן על ישר אחד, עובר מעגל אחד ויחיד.

- מרובע החסום במעגל (מעגל החוסם מרובע)

משפט:

* ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם הסכום של זוג זוויות נגדיות של המרובע שווה ל- 180°.

- מצולע משוכלל החסום במעגל.

משפט:

* כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.

מצולע חוסם מעגל (מעגל חסום במצולע)

- מצולע חוסם מעגל (מעגל חסום במצולע) - הגדרה
- משולש החוסם מעגל (מעגל החסום במשולש)

משפט:

- שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.
- בכל משולש אפשר לחסום מעגל.

- מרובע החוסם מעגל (מעגל החסום במרובע)

משפט:

- מרובע חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.

- מצולע משוכלל החוסם מעגל.

משפט:

* בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.

היקף מעגל ושטח עיגול

- חישוב היקף של מעגל.
- חישוב שטח של עיגול.

טריגונומטריה במישור

תכנים

<u>משפט הסינוסים</u>: במשולש ABC מתקיים: $\frac{a}{\sin\angle A}=\frac{b}{\sin\angle B}=\frac{c}{\sin\angle C}=2R$, R רדיוס המעגל החוסם את המשולש

<u>שטח של צורות גאומטריות</u>

שטח משולש שווה למחצית מכפלת שתי הצלעות בסינוס הזווית שביניהן.

שטח מקבילית כמכפלת שתי הצלעות בסינוס הזווית שביניהן.

חישוב שטח של צורות גאומטריות תוך הסתמכות על הידע שנצבר עד כה.

המספר π (העשרה)

- אומדן מספר π על סמך חישוב שטחים של סדרה עולה של מצולעים משוכללים חסומים / חוסמים
  - כולל הסבר כללי על קיום מספר המביע את היחס בין היקף מעגל לקוטרו ובין שטח המעגל לריבוע מחוגו.
  - מומלץ ללוות את הלימוד ברקע היסטורי על חישובי π בתקופות שונות ובתרבויות שונות.

גאומטריה אנליטית

תכנים

<u>מעגל</u>

- משוואה קנונית של מעגל: $x^2 + y^2 = R^2$, R רדיוס המעגל

- משוואה כללית של מעגל: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ (שיעורי מרכז המעגל (a,b) ו- R רדיוס המעגל).

הערה: משוואת המעגל היא הביטוי האנליטי של הגדרת המעגל כמקום גאומטרי.

<u>מעגל וישר</u>

- קביעת המצב הדדי בין מעגל וישר בשתי הדרכים הבאות:
  * באמצעות השוואת הרדיוס למרחק מרכז המעגל מהישר.
    (ללא שימוש בנוסחת המרחק בין נקודה לישר)
  * באמצעות פתרון מערכת משוואות המורכבת ממשוואת המעגל וממשוואת הישר.
- משיק למעגל בנקודה שעל המעגל (כתנאי ניצבות).
- מעגל המשיק לאחד הצירים או לשניהם.

<u>שני מעגלים</u>

- מצב הדדי בין שני מעגלים: קביעת המצב ההדדי בין שני מעגלים בהתאם לקשר שבין אורכי הרדיוסים של שני המעגלים לבין המרחק בין שני המרכזים.

פרישה אפשרית של תכנית הלימודים בגאומטריה – כיתה י"א

תכנון הוראת הגאומטריה, בשילוב של שלושת תחומי הגאומטריה, יכולה להיעשות במספר דרכים.

להלן שתי אפשרויות לרצף של הוראת הנושאים השונים. ניתן להתנהל ברצפים נוספים.

אפשרות ראשונה

<u>הערה</u>: לאורך הוראת הנושאים החדשים, דרוש ידע מחטיבת הביניים ומכיתה י'.

מס'	נושא	הערות	מספרי דוגמאות
1א	גאומטריה אוקלידית - הגדרת מעגל כמקום גאומטרי, הגדרת מושגים בסיסיים במעגל (רדיוס, קוטר, קשת, מיתר, זווית מרכזית,		

	זווית היקפית, מדידת קשת, עיגול, גזרה).		
2א	גאומטריה אנליטית – משוואה קנונית של מעגל, משוואה כללית של מעגל.		
3א	גאומטריה אוקלידית + גאומטריה אנליטית – משפטים במעגל הקשורים למיתרים במעגל, למרחקים ממרכז המעגל, לזוויות מרכזיות, ולזוויות היקפיות. <u>הערה</u>: החל משלב זה ניתן לשלב גם נושאים בטריגונומטריה שנלמדו בכיתה י'.	בשלב זה בהוראה, גאומטריה אוקלידית וגאומטריה אנליטית שזורות זו בזו. הוראת המשפטים יכולה להיעשות בשילוב של הדרכים הבאות: - העלאת השערה בנוגע לתכונה, בדרך אינדוקטיבית (תוך שימוש בכלים ממוחשבים המאפשרים מדידות), הוכחת ההשערה בגאומטריה אוקלידית, ווידוא התכונה בכלים של גאומטריה אנליטית בבקרה. - הוכחת התכונה באמצעות גאומטריה אוקלידית, ווידוא התכונה בכלים של גאומטריה אנליטית. - העלאת השערה בנוגע לתכונה, בדרך אינדוקטיבית – תוך שימוש בכלים של גאומטריה אנליטית, והוכחת ההשערה בגאומטריה אוקלידית. <u>הערה</u>: ניתן להחליף את ההוכחה בגאומטריה אוקלידית, בהוכחה בכלים של גאומטריה אנליטית, במקרים בהם ההוכחה לא מורכבת מדי.	1, 11

4א	גאומטריה אוקלידית – מצולע חסום במעגל (מעגל חוסם מצולע) – הגדרה ומשפטים.		2, 3, 10
5א	טריגונומטריה – משפט הסינוסים	החל משלב זה בהוראה, שלושת התחומים: גאומטריה אוקלידית, גאומטריה אנליטית וטריגונומטריה, שזורים זה בזה.	5, 6, 7
6א	גאומטריה אוקלידית + גאומטריה אנליטית – המצב ההדדי בין שני מעגלים.		
7א	גאומטריה אוקלידית + גאומטריה אנליטית – משיק למעגל – הגדרה ותכונות.		4, 8
8א	גאומטריה אוקלידית + גאומטריה אנליטית – מצולע חסום במעגל (מעגל חסום במצולע) – הגדרה ומשפטים.		9

אפשרות שנייה

<u>הערה</u>: לאורך הוראת הנושאים החדשים, דרוש ידע מחטיבת הביניים ומכיתה י'.

מס'	נושא	הערות	מספרי דוגמאות
1ב	גאומטריה אוקלידית - הגדרת מעגל כמקום גאומטרי, הגדרת מושגים בסיסיים במעגל (רדיוס, קוטר, קשת, מיתר, זווית מרכזית, זווית היקפית, מדידת קשת, עיגול, גזרה).	הדגשה שקוטר הוא מיתר וכי הוא המיתר הארוך ביותר(מתוך אי שוויון המשולש).	
2ב	גאומטריה אוקלידית – משפטים במעגל הקשורים למיתרים במעגל, למרחקים ממרכז המעגל, לזוויות מרכזיות, ולזוויות היקפיות.		
3ב	טריגונומטריה – תרגול המשפטים במעגל, שנלמדו עד כה, תוך שילוב של טריגונומטריה וגאומטריה אוקלידית.	דרוש ידע קודם בטריגונומטריה של משולש ישר זווית (מכיתה י').	
4ב	<u>נושא 4ב</u>: גאומטריה אנליטית – משוואה קנונית של מעגל, משוואה כללית של מעגל.	בשלב זה בהוראה, שלושת התחומים (גאומטריה אוקלידית, גאומטריה אנליטית וטריגונומטריה) שזורים זה בזה. לכן, התרגול של המשפטים שנלמדו עד כה יכול להיעשות בשילוב של שלושת התחומים. בנוסף, ר' הערה בנושא 3א באפשרות הראשונה.	1

מכאן ההמשך כמו באפשרות ראשונה מנושא 4א ואילך.

<u>הערה</u>: ניתן לעשות שילובים נוספים, מעבר לשתי האפשרויות הללו.

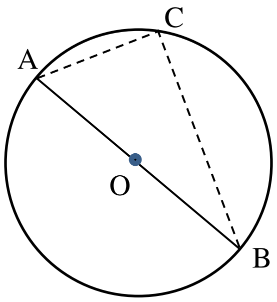
נספח– דוגמאות

הערה: בדוגמאות שבהמשך, חלק מהסעיפים הם חזרה על הנלמד בכיתה י'. ידע זה דרוש לצורך קישור לנלמד בכיתה י"א

שאלה לבדיקת תכונה גאומטרית (ללא מחשב ובאמצעות מחשב)

שילוב של גאומטריה אנליטית עם גאומטריה אוקלידית

(דוגמה מס' 1)



נתון מעגל: $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 25$

1. (1) נתונות הנקודות: $A(6,2)$ ו- $B(-2,8)$

(i בדקו שנקודות A ו- B נמצאות על המעגל.

(ii) בדקו ש- AB הוא קוטר במעגל.

העבירו את הקוטר AB.

(2) בחרו נקודה $C(5,9)$.

* בדקו שהיא נמצאת על המעגל

* חשבו את שיפוע הישר AC ואת שיפוע הישר BC

* הסיקו מסקנה בנוגע ל- $\measuredangle ACB$.

2. (1) בחרו נקודה נוספת $D(7,5)$ שעל המעגל. חזרו על התהליך בסעיף ב' חשבו את $\measuredangle ADB$.

מה קיבלתם?

(2) בחרו נקודה $P(-1,1)$ חדשה שעל המעגל וחשבו את $\measuredangle APB$. מה קיבלתם?

3. העלו השערה לגבי זווית היקפית הנשענת על קוטר.

לפניכם היישומון: [זווית היקפית הנשענת על קוטר](#) .

4. (1) הזיזו את הנקודה C ביישומון ובדקו את תוצאות חישוב הזוויות בסעיפים א' וב'.

5. (2) הזיזו ביישומון את הנקודה C לנקודות נוספות על המעגל ועקבו אחר הזווית $\measuredangle ACB$.

6. האם השערתכם בסעיף ג' נכונה?

אם כן, נסחו את המשפט בנוגע לזווית ההיקפית הנשענת על קוטר. והוכיחו אותו.

7. (1) העבירו קוטר נוסף דרך נקודות חדשות $E(7,5)$ ו- $F(-3,5)$ שעל המעגל.

(2) בחרו נקודות $A(6,2)$ ו- $B(-2,8)$ שעל המעגל וחשבו את $\measuredangle EAF$ ו- $\measuredangle EBF$.

(3) איזה מרובע הוא AEBF?

8. הוכיחו את השערתכם, לפי ההנחיות הבאות:

- העבירו שני קטרים במעגל.
- חברו את קצות הקטרים כך שיוצר מרובע.
- קבעו מהו סוג המרובע המתקבל והוכיחו זאת.

הערה: בשאלה זו ניתן היה לבקש כסעיף ראשון להוכיח, באמצעות גאומטריה אוקלידית, את המשפט: "זווית היקפית הנשענת על הקוטר היא זווית ישרה", ובסעיפים הבאים לוודא תכונה זו עבור מקרים מסוימים, באמצעות כלים מגאומטריה אנליטית (למשל, באמצעות חישוב שיפועי המיתרים).

הדגמת הגישה של חשיבה אינדוקטיבית ודדוקטיבית

שילוב של גאומטריה אנליטית עם גאומטריה אוקלידית

(דוגמה מס' 2)

שאלה ראשונה

נתון משולש ששיעורי קדקודיו הם: $A(6,8)$; $B(7,1)$; $C(-2,4)$.

מצאו את המשוואות של שניים מהאנכים האמצעיים.

1. מצאו את נקודת החיתוך (S) של שני האנכים האמצעיים.
2. האם האנך האמצעי לצלע השלישית עובר גם הוא באותה נקודת חיתוך (S) שמצאתם בסעיף ב'? הסבירו.
3. העלו השערה בנוגע לאורכים SA, SB, SC. בדקו את השערתכם באמצעות חישוב.
4. מצאו את משוואת המעגל שמרכזו S ורדיוסו הוא אורך אחד הקטעים SA, SB, SC. כיצד נקרא מעגל זה?

שאלה שנייה

נתון משולש ששיעורי קדקודיו הם: $A(0,0)$; $B(7,1)$; $C(6,8)$.

חזרו על סעיפים א'-ה' בשאלה ראשונה.

שאלה שלישית

נתון משולש ששיעורי קדקודיו הם: $A(0,0)$; $B(6,0)$; $C(-4,2)$.

חזרו על סעיפים א'-ה' בשאלה ראשונה.

שאלה רביעית

1. תארו באופן כללי, את האופן שבו ניתן למצוא את משוואת המעגל החוסם משולש, על פי שלושת קדקודיו.
2. האם באופן זה ניתן לחסום כל משולש ששלושת קדקודיו נתונים? הסבירו.

הערה: במידה והתלמידים למדו את המשפט בנוגע למרכז המעגל החוסם משולש, ניתן לבקש לנסח את המשפט עליו הם מסתמכים.

הדגמת הגישה של חשיבה אינדוקטיבית ודדוקטיבית

שילוב של גאומטריה אוקלידית עם גאומטריה אנליטית ועם טריגונומטריה

דוגמה מס' 3

שאלה ראשונה

נתון משולש חד זוויות ששיעורי קודקודיו הם: A(-5,12), B(-6,5), C(3,8).

1. (1) מצאו את משוואות האנכים האמצעיים לצלעות AC ו- BC.
   (2) חשבו את השיעורים של מרכז המעגל החוסם משולש זה.
   (3) מצאו את משוואת המעגל החוסם משולש זה.
   (4) היכן נמצא מרכז המעגל החוסם: בתוך המשולש, על אחת מצלעות המשולש או מחוץ למשולש?
2. חשבו את גודל הזווית BAC.

שאלה שנייה

נתון משולש ששיעורי קודקודיו הם: A(5,6), B(-1,2), C(0,7).

א. הוכיחו כי המשולש הוא ישר זווית.

ב. (1) היכן נמצא מרכז המעגל החוסם: בתוך המשולש, על אחת מצלעות המשולש או מחוץ למשולש?
   (2) חשבו את השיעורים של מרכז המעגל החוסם משולש זה.
   (3) מצאו את משוואת המעגל החוסם משולש זה.

ג. חשבו את גודל הזווית BAC.

שאלה שלישית

נתון משולש קהה זווית ששיעורי קודקודיו הם: A(1,5), B(-1,1), C(3,5).

א. (1) מצאו את משוואות האנכים האמצעיים לצלעות AC ו- BC.
   (2) חשבו את השיעורים של מרכז המעגל החוסם משולש זה.
   (3) מצאו את משוואת המעגל החוסם משולש זה.
   (4) היכן נמצא מרכז המעגל החוסם: בתוך המשולש, על אחת מצלעות המשולש או מחוץ למשולש?

3. חשבו את גודל הזווית BAC אם ידוע כי היא זווית קהה.

שאלה רביעית

א. הסבירו היכן נמצא מרכז המעגל החוסם משולש: בתוך המשולש, על אחת מצלעות המשולש או מחוץ למשולש, בהתאם לסוג משולש (חד זווית, קהה זווית, ישר זווית).

ב. תארו באופן כללי, את האופן שבו ניתן למצוא את זווית המשולש, כאשר נתונים השיעורים של שלושת קודקודי המשולש.

הדגמת הגישה של חשיבה אינדוקטיבית ודדוקטיבית

שאלות המשלבת גאומטריה אנליטית עם גאומטריה אוקלידית

דוגמה מס' 4

שאלה ראשונה

נתון: מעגל שמרכזו $O(3,1)$ ורדיוסו $R=5$, משוואת הישר $y=2x$.

קבעו מה המצב ההדדי בין המעגל לישר (הישר חותך את המעגל בשתי נקודות / הישר משיק למעגל – חותך את המעגל בנקודה אחת / הישר אינו חותך את המעגל) בשתי דרכים:

- האחת – חשבו את המרחק של מרכז המעגל מהישר.

  (רמז: מצאו את משוואת האנך ממרכז המעגל לישר, לאחר מכן מצאו את נקודת החיתוך בין הישר לאנך, ואז חשבו את המרחק).
- השנייה – מצאו את מספר נקודות החיתוך בין הישר למעגל.

שאלה שנייה

נתון: מעגל שמרכזו $O(-3,2)$ ורדיוסו $R=\sqrt{20}$, משוואת הישר $y=-2x+6$.

קבעו מה המצב ההדדי בין המעגל לישר (הישר חותך את המעגל בשתי נקודות / הישר משיק למעגל – חותך את המעגל בנקודה אחת / הישר אינו חותך את המעגל) בשתי דרכים:

- האחת – חשבו את המרחק של מרכז המעגל מהישר (ראו רמז בשאלה הראשונה).
- השנייה – מצאו את מספר נקודות החיתוך בין הישר למעגל.

שאלה שלישית

נתון: מעגל שמרכזו $O(3,-1)$ ורדיוסו $R=4$, משוואת הישר $y=-x+10$.

קבעו מה המצב ההדדי בין המעגל לישר (הישר חותך את המעגל בשתי נקודות / הישר משיק למעגל – חותך את המעגל בנקודה אחת / הישר אינו חותך את המעגל) בשתי דרכים:

- האחת – חשבו את המרחק של מרכז המעגל מהישר (ראו רמז בשאלה הראשונה).
- השנייה – מצאו את מספר נקודות החיתוך בין הישר למעגל.

שאלה רביעית

באופן כללי, הסבירו כיצד ניתן לקבוע את המצב ההדדי בין מעגל וישר, כאשר נתון מרכז המעגל ורדיוסו וכן משוואת הישר. התייחסו לשתי דרכים שונות.

שילוב של גאומטריה אוקלידית עם גאומטריה אנליטית וטריגונומטריה

(דוגמה מס' 5)

1. הוכיחו שטרפז החסום במעגל הוא טרפז שווה שוקיים.

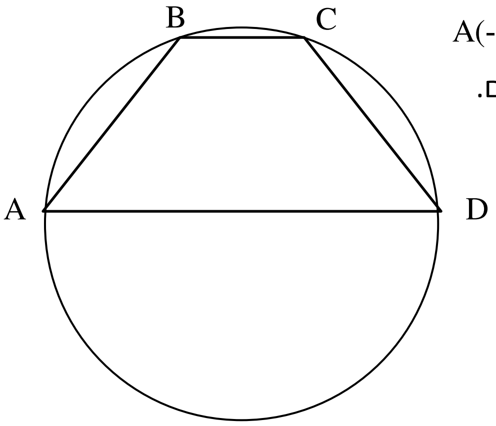
2. במעגל: $(x-7)^2 + (y-20)^2 = 169$ חסום מרובע ABCD

ששיעורי קדקודיו הם: $A(-6,20)$; $B(2,32)$; $C(12,32)$; $D(20,20)$

(1) הראו (באמצעות חישובים) שהמרובע הוא טרפז שווה שוקיים.

(2) חשבו את זוויות הטרפז.

(3) חשבו את שטח הטרפז.



הערות:

- בדוגמה זו, ניתן לבקש מהתלמידים ליצור את השרטוט בעצמם, כדי שישימו לב למיקום הנקודות.
- מומלץ לפתור את הסעיפים ב(2) ו- ב(3) בדרכים שונות.

שילוב של גאומטריה אוקלידית עם גאומטריה אנליטית וטריגונומטריה

(דוגמה מס' 6)

1. הוכיחו שטרפז החסום במעגל הוא טרפז שווה שוקיים.

2. במעגל חסום טרפז ABCD.

נקודה $O(6,-2)$ היא מרכז המעגל,

ונקודה $A(-2,2)$ נמצאת על המעגל.

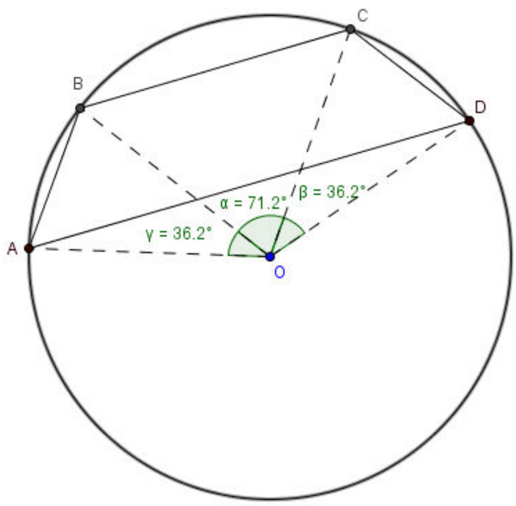
כמו כן נתון כי:

$\sphericalangle AOB = \sphericalangle COD = 36.2^\circ$

ו- $\sphericalangle BOC = 71.2^\circ$

חשבו את שטח הטרפז ABCD.

(באמצעות חיבור וחיסור שטחי משולשים)



3. במעגל שרדיוסו R חסום טרפז ABCD.

נתון: ∢BOC = 〈 וכן: ∢AOB = ∢COD = ®

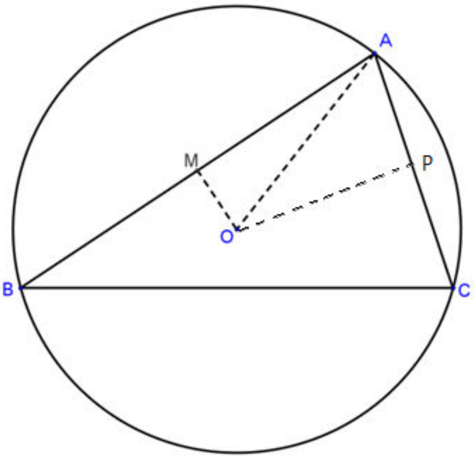
הביעו את שטח המרובע ABCD באמצעות ®, 〈 ו- R.

שילוב של גאומטריה אוקלידית עם טריגונומטריה

(דוגמה מס' 7)

משולש ABC חסום במעגל שמרכזו O.

OM מאונך לצלע AB.



1. הוכיחו כי: $\measuredangle AOM = \measuredangle ACB$.

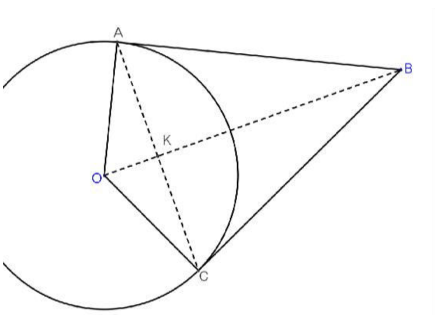
ידוע שהמרחק של מרכז המעגל מהצלע AB הוא 8 ס״מ.

וכן: 18 ס״מ = AC, $\measuredangle ACB = 72°$

2. חשבו את צלעות המשולש ABC לפי הסעיפים הבאים:
   (1) חשבו את רדיוס המעגל.
   (2) חשבו את שתי הזוויות האחרות במשולש ABC.
   (3) חשבו את שתי הצלעות האחרות במשולש ABC.
3. (1) חשבו את היקף המשולש ABC.
   (2) חשבו את שטח המשולש ABC.
4. (1) הנקודה P היא אמצע הצלע AC. הסבירו מדוע OP מאונך ל- AC.
   (2) מהו המרחק בין O לצלע AC.
5. איזו צלע של המשולש ABC נמצאת במרחק הקטן ביותר ממרכז המעגל?
   נסחו את השערתכם ובדקו אותה בעזרת החישובים.

שילוב של גאומטריה אוקלידית עם גאומטריה אנליטית

(דוגמה מס' 8)



AB ו- BC משיקים למעגל בנקודות A ו- C בהתאמה. O מרכז המעגל.

אלכסוני המרובע ABCO נפגשים בנקודה K.

נתון: $O(-2,1)$, $K(-1,2)$, $B(8, 11)$.

1. חשבו את היקף המרובע ABCO ואת שטחו, בהתאם לסעיפים הבאים:
   (1) הוכיחו כי: $OB \perp AC$.
   (2) הוכיחו כי המשולשים OAK ו- ABK דומים.
   (3) חשבו את אורך הקטע AK.

(4) חשבו את היקף המרובע ABCO.

(5) חשבו את שטח המרובע ABCO.

2. חשבו את זוויותיו של המרובע OABC.

3. (1) מצאו את משוואת המעגל. (2) מצאו את שיעורים הקדקודים A ו– C.

4. האם ניתן לחסום את מרובע OABC במעגל? הסבירו.

במידה וניתן, מצאו את משוואת המעגל.

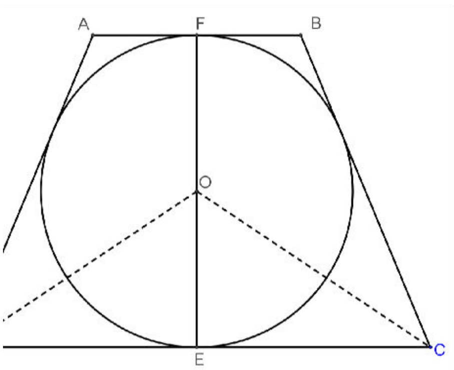
שילוב של גאומטריה אוקלידית עם טריגונומטריה

(דוגמה מס' 9)

מעגל שמרכזו O חסום בטרפז שווה שוקיים ABCD (BC = AD).

E ו- F הן נקודות ההשקה שנמצאות

על בסיסי הטרפז DC ו- AB בהתאמה.



1. הוכיחו כי DE = EC

(רמז: התבוננו ב- ⊗DOC).

2. נתון: $\sphericalangle DCB = 60°$ ו- 12 ס"מ = DC.

חשבו את היקפו ואת שטחו

של טרפז ABCD, בהתאם לסעיפים

הבאים:

(1) חשבו את רדיוס המעגל החסום.

(2) חשבו את גודל הזווית ABO?

(3) חשבו את אורך הבסיס AB.

(4) חשבו את היקף הטרפז ABCD.

(5) חשבו את שטח הטרפז ABCD.

3. נתון: $\sphericalangle DCB = \langle$ ו- a ס"מ = DC.

(1) בטאו את היקף הטרפז ABCD באמצעות 〈 ו- a.

(2) בטאו את שטח הטרפז ABCD באמצעות 〈 ו- a.

4. הציבו בתשובות שקיבלתם בסעיף ג' את הנתונים מהסעיף ב' ובדקו שקיבלתם אותן תוצאות כמו בסעיף ב'.

שילוב של גאומטריה אוקלידית עם טריגונומטריה

(דוגמה מס' 10)

1. במעגל שרדיוסו 10 ס"מ חסום מחומש משוכלל.
   (1) חשבו את שטח המצולע.
   (2) חשבו את היקף המצולע.
2. במעגל שרדיוסו R ס"מ חסום משושה משוכלל.
   (1) הביעו את שטח המצולע באמצעות R.
   (2) הביעו את היקף המצולע באמצעות R.
   (3) חשבו את R אם שטח המשושה שווה ל- $24\sqrt{3}$ סמ"ר.

שילוב של גאומטריה אוקלידית עם גאומטריה אנליטית

(דוגמה מס' 11)

משימה ראשונה

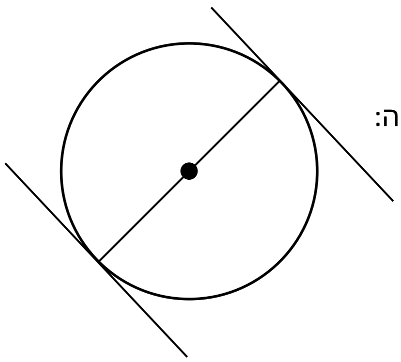
נתונה משוואת המעגל $(x-2)^2+(y+3)^2=25$.

1. (1) מבין כל הנקודות שעל המעגל, מה שיעורי הנקודה, A, בעלת ה- y הגדול ביותר?
   (רמז: היעזרו בשרטוט).
   (2) מבין כל הנקודות שעל המעגל, מה שיעורי הנקודה, B, בעלת ה- y הקטן ביותר?
   (3) האם המיתר המחבר את הנקודות A ו- B הוא קוטר? נמקו.
   (4) מצאו את משוואת המשיק למעגל בנקודה A.
   (5) מצאו את משוואת המשיק למעגל בנקודה B.
   (6) מה המצב ההדדי בין שני המשיקים? נמקו.
2. ידוע כי CD קוטר במעגל. הנקודה C נמצאת ברביע השני ושיעור ה-y שלה הוא 1.
   (1) מצאו את שיעור ה- x של נקודה C ואת משוואת המשיק בנקודה זו.
   (1) מצאו את שיעור ה- x של נקודה D ואת משוואת המשיק בנקודה זו.
   (3) מה המצב ההדדי בין המשיק בנקודה C למשיק בנקודה D? נמקו.
3. נתונה גם נקודה E(5,-7).
   (1) מדוע CE הוא מיתר במעגל?
   (2) האם CE הוא קוטר במעגל? נמקו.
   (3) מצאו את משוואות המשיקים למעגל בנקודות C ו- E.
   (4) מה המצב ההדדי בין שני המשיקים הללו? נמקו.

4. מצאו את השיעורים של הנקודה F: נקודת החיתוך של המעגל עם ציר ה- x ושיעור ה- x שלה שלילי.
(1) מצאו את משוואת המשיק למעגל בנקודה F.
(2) מה המצב ההדדי בין המשיק בנקודה F לבין המשיק בנקודה E מסעיף קודם?
(3) האם המיתר שמחבר את הנקודות E ו- F הוא קוטר?
5. (1) נסחו השערה כללית המתייחסת למצב הדדי של משיקים בקצוות הקוטר.
(2) הוכיחו השערה זו.

<u>הערה</u>: בפעילות זו נעשה שימוש בכלים של גאומטריה אנליטית לצורך העלאת השערה בנוגע לתכונה, ולאחר מכן הוכחת ההשערה בגאומטריה אוקלידית. אפשרות אחרת היא לשנות את הסדר: להציג את המצב הגאומטרי של העברת משיקים בקצות הקטע ובקשה להוכיח תכונה זו באמצעות גאומטריה אוקלידית (סעיף ה') ולאחר מכן לוודא את התכונה בכלים של גאומטריה אנליטית (סעיפים א'-ד').

<u>משימה שנייה</u>



1. נתונה משוואת המעגל $(x+1)^2+(y-3)^2=20$

1. הישרים הבאים משיקים למעגל בנקודות A ו- B בהתאמה:

$$2x+y=11 \quad \text{ו-} \quad -2x-y=9$$

(i) מה המצב ההדדי בין שני המשיקים? נמקו.

(ii) מצאו את שיעור הנקודות A ו- B.

(iii) הראו, באמצעות חישובים כי AB הוא קוטר במעגל.

2. הישרים הבאים משיקים למעגל בנקודות C ו- D בהתאמה:

$$6x-3y=15 \quad \text{ו-} \quad -2x+y=15$$

(i) מה המצב ההדדי בין שני המשיקים? נמקו.

(ii) מצאו את שיעור הנקודות C ו- D.

(iii) הראו, באמצעות חישובים כי CD הוא קוטר במעגל.

הערה: המשימה מדגימה את המשפט: אם שני משיקים למעגל נתון, מקבילים זה לזה, אז הקטע המחבר את נקודות ההשקה הוא קוטר במעגל.

שילוב של גאומטריה אוקלידית עם טריגונומטריה

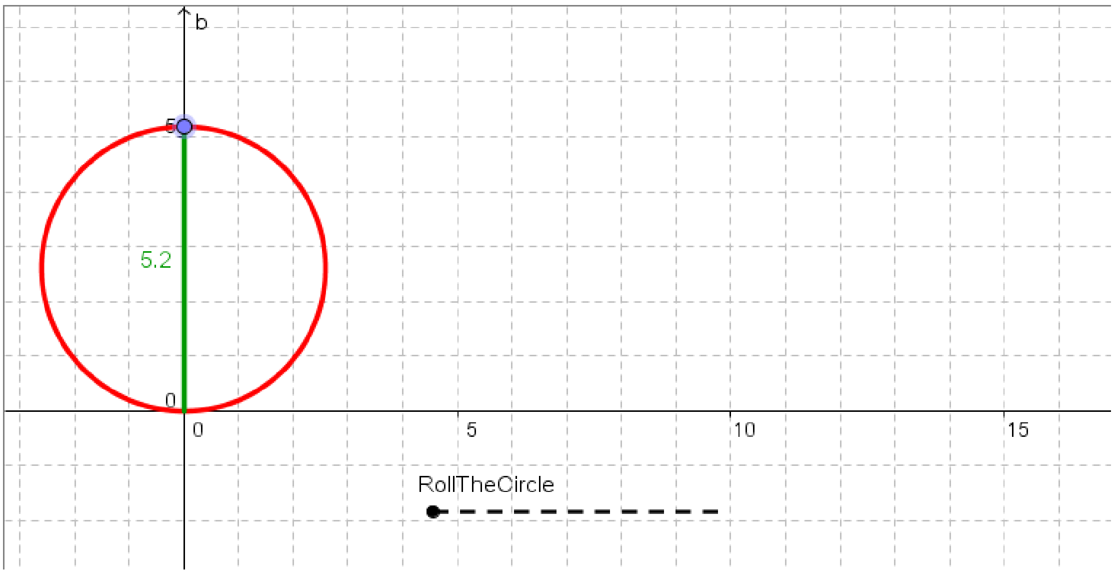
בהקשר לאומדן של מספר פאי

דוגמאות

<u>דוגמה</u> (המחשה של היחס בין היקף המעגל לבין קוטרו – המחשת משמעות π וקירוב לערכו)

ביישומון [בכתובת זו]:

1. קבעו את הערך של קוטר המעגל (ע"י גרירת הנקודה הכחולה)



2. אמדו את היקף העיגול, על ידי גלגול של העיגול לאורך ציר x (ע"י הזזה של הסרגל RollTheCircle).
3. מה הקשר בין היקף העיגול לבין קוטר המעגל?

<u>דוגמא</u>) אופן חישוב שטח עיגול על סמך ידיעת היקף מעגל(

לפניכם הדגמות לאופן שבו ניתן לחשב שטח של עיגול, לאור ידיעת אופן חישוב היקף מעגל:

סרטון 1   סרטון 2   סרטון 3

סטטיסטיקה – כיתה י"א (35 שעות)

חזרה על תכנים שנלמדו ביוד (4 שעות) – ממוצע וסטיית תקן

התפלגות נורמלית (15 שעות(

מבוא

בתכנית הלימודים של כיתה י' התלמידים למדו לחשב את ההסתברויות של משתנים בדידים, כאשר נתונות השכיחויות שלהם. פרק זה עוסק במשתנים מקריים (לאו דווקא בדידים) וצורות שונות של ההתפלגות שלהם. "התפלגות" היא מושג מרכזי בסטטיסטיקה שמראה התאמה בין ערכים אפשריים של משתנה מקרי לבין הסתברות הופעתם. התפלגות נורמלית – היא צורת ההתפלגות של משתנה מקרי הנפוצה ביותר. פוגשים את ההתפלגות הנורמלית בחקר תופעות בפיזיקה, ביולוגיה, כלכלה, רפואה ובתחומי מחקר אחרים.

מטרות כלליות

1. התלמיד יכיר תופעות במדעים, בחברה ובכלכלה המתפלגות נורמלית ותופעות שלא מתפלגות נורמלית.
2. התלמיד יבין שצורת גרף ההתפלגות הנורמלית נקבעת על ידי ממוצע כמדד מרכז וסטיית תקן כמדד פיזור.
3. התלמיד יבין את משמעות התכונות של התפלגות נורמלית: סימטריה, ריכוז מרבית הנתונים במרכז ודעיכה מהירה בקצוות הגרף.
4. התלמיד יבין שהשטח החלקי שמתחת לעקומה של ההתפלגות הנורמלית מייצג את ההסתברות או את החלק היחסי או את האחוז המתאים של קבוצה בעלת תכונה משותפת.
5. התלמיד יבין את המשמעות של ציוני תקן ואת השימוש בהם לקביעת המיקום של נתון בודד בהשוואה לשאר האוכלוסייה.
6. התלמיד יבין שהתפלגות נורמלית משמשת כבסיס אחיד להשוואות נתונים של אוכלוסיות גדולות שונות.
7. התלמיד יכיר התפלגות נורמלית סטנדרטית (0,1) , את ייצוגה הגרפי ואת הטבלה המלאה של ההתפלגות הנורמלית המצטברת.

תכנים / נושאים מתמטיים עיקריים

- ציוני תקן

- תכונות עקומת ההתפלגות הנורמלית
- שימושים בעקומה של ההתפלגות הנורמלית:
  א. למציאת הסתברות או למציאת החלק היחסי (באחוזים) של קבוצה עם תכונה משותפת.
  ב. למציאת תכונה של קבוצה בהינתן החלק היחסי של הקבוצה.
- שימוש בטבלה המלאה של ההתפלגות הנורמלית (0,1) המצטברת.
- שילוב בין התפלגות נורמלית עם נושאים בהסתברות ובסטטיסטיקה.

פירוט התכנים

<u>ציון תקן</u>

- הכרת המושג ומשמעותו כמיקום יחסי של נתון גולמי מתוך אוכלוסייה ביחס לממוצע הנמדד ביחידות של סטיות התקן. כלומר, משמעותו כמספר סטיות התקן של הנתון מהממוצע.
  (יש לשים לב שציון תקן ניתן לחישוב בכל קבוצת נתונים מספריים, ללא קשר לסוג ההתפלגות)
- חישוב ציון תקן על פי ממוצע וסטיית תקן נתונים עבור האוכלוסייה, ולהיפך: חישוב נתונים חסרים על פי סטיית התקן ונתון נוסף.
- חיוביות ושליליות של ציוני התקן ומשמעותן.
- שימוש בציוני התקן להשוואת מיקום יחסי של נתונים גולמיים, באוכלוסיות השונות בממוצע ובסטיית התקן שלהן.
- תכונות של ציוני התקן:
  - סכום ציוני התקן שווה ל- 0
  - סטיית התקן של ציוני התקן שווה ל- 1
  - ציון התקן הוא גודל ללא ממד.

<u>התפלגות נורמלית</u>

- ייצוגים גרפיים של התפלגויות שונות (כגון, התפלגות בעלת זנב ימני, התפלגות בעלת זנב שמאלי), ההבדלים בין ההתפלגויות ומשמעותם.
- תופעות שבהן התפלגות הנתונים היא נורמלית.
- תופעות שבהן התפלגות הנתונים אינה התפלגות נורמלית.
- תכונות של עקומה נורמלית:
  - הבנת המשמעות של עקומה של התפלגות נורמלית – כהתפלגות ההסתברויות.
  - סימטריה של העקומה של ההתפלגות הנורמלית ביחס לממוצע.

- אפשרות אומדן פיזור הנתונים סביב הממוצע על סמך צורת העקומה של ההתפלגות הנורמלית.

- עקומת ההתפלגות של ציוני התקן והתכונות שלה :
  - ממוצע ציוני התקן הוא 0.
  - סימטריות ביחס לממוצע.
  - השטח מתחת לעקומה המתוקננת הוא 1.

<u>שימוש בעקומה של התפלגות נורמלית</u>

- הכרת הטבלה המלאה של התפלגות נורמלית סטנדרטית מצטברת.
- שימוש בטבלה :
  - למציאת הסתברויות של מאורעות.
  - למציאת ציון התקן המתאים להסתברות נתונה ולהיפך.
  - למציאת ממוצע ו/או סטיית התקן, כאשר נתונים ציוני התקן ו/או הסתברויות המתאימות להם.
  - שימוש בנוסחה $p(z_1 < z < z_2) = p(z_2) - p(z_1)$
  - שימוש בתכונות של העקומה של התפלגות נורמלית לחישוב הסתברויות תוך שימוש בנוסחאות :

$p(z > z_x) = p(z < z_{-x})$ $p(z > z_x) = 1 - p(z < z_x)$,

נספח – דוגמאות לפרק "התפלגות נורמלית"

דוגמה 1 (ציוני התקן – הגדרה)

באוכלוסייה מסוימת:

ציון התקן שמתאים לנתון 70 הוא Z_1.

ציון התקן שמתאים לנתון 74 הוא Z_2.

ידוע כי $Z_1 = 3 \cdot Z_2$.

חשבו את הממוצע.

דוגמה 2 (ציוני תקן – הבנת משמעותם ושימוש בהם – כולל להשוואת קבוצות)

לקראת בחינת הבגרות, בבית ספר "דקל" נערך מבחן מסכם. איילה ופנינה נבחנו במבחן.

ציון התקן של איילה היה 1.25 וציון התקן של פנינה היה -0.5 .

1. האם הציון של פנינה מעל/מתחת לממוצע?

הציון שקיבלה איילה במבחן היה 92, הציון שקיבלה פנינה היה 64 .

2. חשבו את הממוצע ואת סטיית התקן של ציוני כל התלמידים במבחן המסכם.

ידוע כי ציוני המבחן מתפלגים נורמלית.

3. אריאל קיבל ציון 80 במבחן המסכם. האם מספר התלמידים שקיבלו ציון שגבוה מהציון של אריאל שווה למספר התלמידים שקיבלו ציון שנמוך מהציון של פנינה? הסבירו.
4. במבחן מועד ב פנינה קיבלה ציון 70.

   ממוצע הציונים של המבחן במועד ב היה 80 עם סטיית התקן 10.

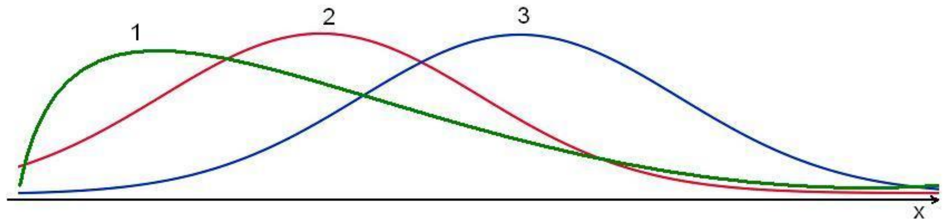
   האם פנינה הצליחה במבחן מועד ב יותר או פחות לעומת המבחן הראשון בהשוואה לשאר התלמידים שנבחנו? הסבירו.

דוגמה 3 (ייצוגים גרפיים של התפלגויות שונות)

התפלגות הגבהים של בנים ושל בנות הינה נורמלית.

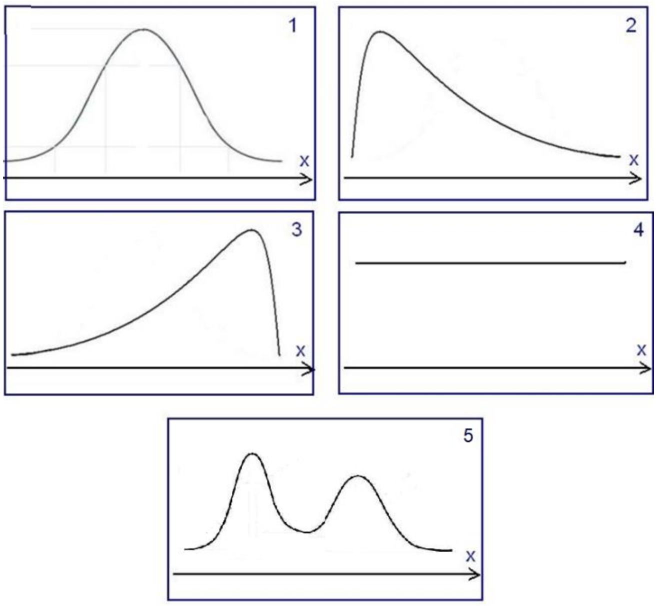
ממוצע הגבהים של הבנים גבוה מממוצע הגבהים של הבנות.

לפניכם שלושה גרפים של התפלגויות שונות. איזה גרף מתאר את התפלגות הגבהים של הבנים ואיזה גרף מתאר את התפלגות הגבהים של הבנות? הסבירו.



דוגמה 4 (ייצוגים גרפיים של התפלגויות שונות)

מבחן מסכם של קורס א באוניברסיטה היה קשה מהרגיל. רוב הציונים במבחן היו נמוכים ומעט ציונים היו גבוהים. במבחן המסכם של קורס ב התפלגות הציונים הייתה נורמלית.



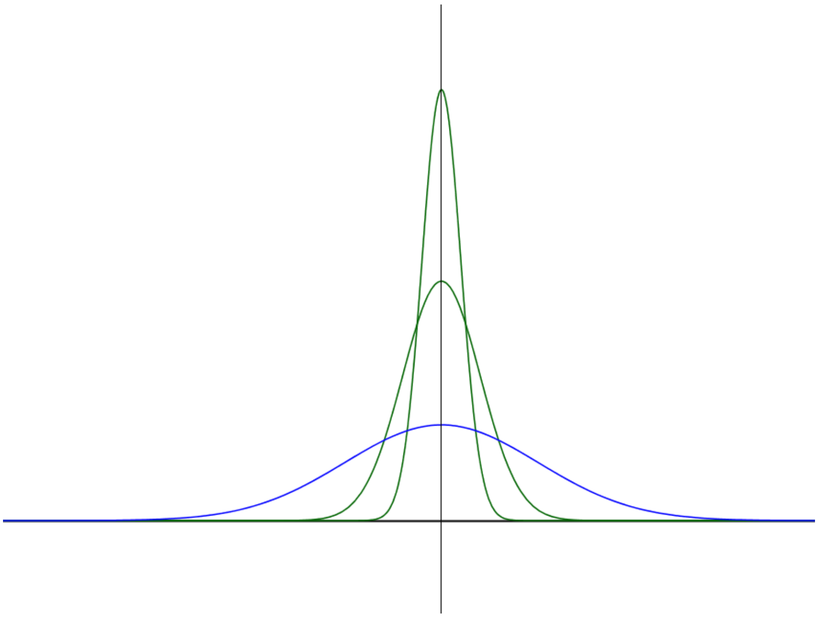
בכל הגרפים ציר ה- x מייצג את הציונים.

1. איזה מבין הגרפים יכול לתאר את ההתפלגות של ציוני המבחן המסכם של קורס א ואיזה מתאים לקורס ב?
2. קבע, לגבי כל אחד מההיגדים הבאים, לאיזה מהגרפים שבסרטוט הוא מתאים, נמק את קביעתך
   (1) רוב הציונים גבוהים, מעט ציונים נמוכים.
   (2) הרבה ציונים גבוהים, הרבה ציונים נמוכים, מעט ציוני ביניים.
3. איזה מבין ההיגדים הבאים מתאים לגרף 4? נמק את קביעתך.
   (1) כל התלמידים קיבלו אותו ציון במבחן.
   (2) לכל ציון יש אותו מספר תלמידים שקיבלו אותו.
4. בקורס שבו הציונים מתפלגים נורמלית ידוע שציון התקן המתאים ל-78 הוא 0.
   (1) מהו הממוצע של הציונים בקורס זה?
   (2) מהו החציון של הציונים בקורס זה?

דוגמה 5 (השוואת אוכלוסיות המתפלגות נורמלית - על סמך פיזור הנתונים)

נתונות שלוש עקומות של התפלגות נורמלית המתאימות לשלוש אוכלוסיות שונות.

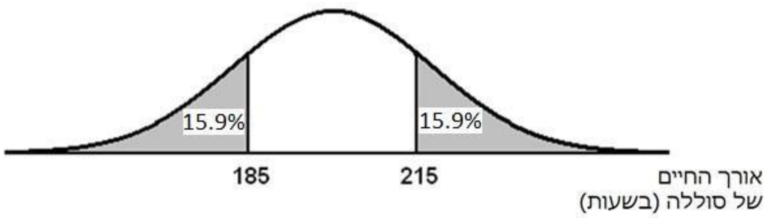
השוו בין שלוש האוכלוסיות תוך התייחסות לממוצע ולסטיית התקן של כל אחת מהאוכלוסיות.



דוגמה 6 (שימוש בתכונות של עקומה נורמלית + שימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת)

אורך החיים של סוללות מתפלג נורמלית. אורך החיים נמדד בשעות.

לפניכם גרף המתאר את ההתפלגות של אורך החיים של סוללה:



1. (1) מצאו את אורך החיים הממוצע של הסוללה.

   (2) מצאו את סטיית התקן.

2. 2% מהסוללות, שאורך החיים שלהן הוא הנמוך ביותר, נחשבות לפגומות.

   מצאו את אורך החיים של סוללה אשר מתחתיו היא נחשבת פגומה.

3. (1) איזה אחוז מהסוללות פועלות יותר מ- 222.5 שעות?

   (2) מפעל קנה $1,000$ סוללות. כמה מהן עשויות לפעול למעלה מ- 222.5 שעות?

דוגמה 7 (שימוש דו-כווני בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת)

בבית ספר גדול נערך סקר שבדק כמה זמן ביממה תלמידים גולשים באינטרנט.

נמצא כי פרקי הזמן ביממה, שבהם תלמידים גולשים באינטרנט, מתפלגים נורמלית וסטיית התקן היא 25 דקות.

נמצא גם כי 90% מהתלמידים גולשים באינטרנט פחות מ- 180 דקות ביממה.

1. כמה דקות ביממה בממוצע תלמידי בית הספר גולשים באינטרנט?
2. מהו אחוז התלמידים בבית הספר הגולשים באינטרנט פחות מ- 120 דקות ביממה?

<u>דוגמה 8</u>) השוואת קבוצות + שימוש דו כיווני בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת(

הציונים במבחני הבגרות במתמטיקה (מועדי א ו- ב) מתפלגים נורמלית.

הציון הממוצע במועד א היה 76.6, וסטיית התקן הייתה 10.

הציון הממוצע במועד ב היה 80, וסטיית התקן הייתה 5.

1. רמי ניגש למבחן בשני המועדים, ובשניהם הוא קיבל ציון של 82.
   באיזה מבחן הצליח רמי יותר בהשוואה לשאר הנבחנים? הסבירו.
2. יוסי ניגש למבחן בשני המועדים, ובשניהם הוא קיבל אותו ציון.
   במועד א 77% מהנבחנים קיבלו ציון נמוך מהציון של יוסי.
   מהו אחוז הנבחנים שבמועד ב קיבלו ציון נמוך מהציון של יוסי?

<u>דוגמה 9</u>) שימוש דו-כיווני בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת למציאת הסתברויות (

הציונים במבחן כניסה לחוג מחשבים מתפלגים נורמלית.

הציון הממוצע במבחן הוא 53 וסטיית התקן היא 11.5.

מספר הנבחנים במבחן הוא 4,500.

1. כמה נבחנים (בערך) קיבלו ציון גבוה מ- 65?
2. רק 900 נבחנים התקבלו לחוג מחשבים. החל מאיזה ציון התקבלו הנבחנים?
   (בתשובתך דייק עד ספרה אחת אחרי הנקודה העשרונית.)

<u>דוגמה 10</u>) שילוב השימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת עם הסתברות של איחוד וחיתוך מאורעות(

הציונים של קבוצת תלמידים במבחן מסוים מתפלגים נורמלית.

הציון הממוצע הוא 71, וסטיית התקן היא 15.

387 תלמידים קיבלו ציון בין 62 ל- 92.

1. כמה תלמידים ניגשו למבחן?
2. בוחרים באקראי תלמיד אחד. מהי ההסתברות שהתלמיד קיבל ציון גבוה מ- 92?
3. בוחרים באקראי שני תלמידים.
   מהי ההסתברות שבדיוק אחד מהם קיבל ציון גבוה מ- 92?

<u>דוגמה 11</u>) שימוש בתכונות עקומת ההתפלגות הנורמלית + שימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת(

הציונים של נבחנים בבחינת כניסה לאוניברסיטה מתפלגים נורמלית.

הציונים של 10% מהנבחנים גבוהים מ- 84, והציונים של 10% מהנבחנים נמוכים מ- 68.

1. סרטטו סקיצה של עקומת ההתפלגות הנורמלית וסמנו בה את הנתונים.
2. חשבו את ממוצע הציונים ואת סטיית התקן.
3. בשנה מסוימת ניגשו לבחינת הכניסה 2,000 נבחנים.
   כמה נבחנים קיבלו ציון שנמצא בין סטיית תקן אחת מתחת לממוצע לבין סטיית תקן אחת מעל הממוצע?

<u>דוגמה 12</u>)שילוב השימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת עם הסתברות של חיתוך מאורעות(

במוסד מסוים נערכו שני מבחני קבלה, באנגלית ובמתמטיקה. ההסתברות להצליח במבחן אחד אינה תלויה בהסתברות להצליח במבחן האחר. הציונים בשני המבחנים התפלגו נורמלית.

ממוצע הציונים במבחן באנגלית היה 77 וסטיית התקן הייתה 20.

ממוצע הציונים במבחן במתמטיקה היה 81 וסטיית התקן הייתה 10.

הקבלה ללימודים מותנית בציון גבוה מ- 90 בכל אחד משני המבחנים.

מהי ההסתברות שתלמיד, שנבחר באקראי, יתקבל ללימודים?

<u>דוגמה 13</u>)שילוב השימוש בטבלת ההתפלגות הנורמלית הסטנדרטית המצטברת עם הסתברות של איחוד וחיתוך מאורעות(

כדי להתקבל לאוניברסיטה, המועמדים נדרשים לעבור מבחן כניסה.

ציון המעבר במבחן הוא 75. השנה נערכו שני מבחני כניסה לאוניברסיטה.

80% מהמועדים נבחנו במבחן הראשון, ושאר המועמדים נבחנו במבחן השני.

התפלגות הציונים בשני המבחנים הייתה נורמלית.

במבחן הראשון היה הציון הממוצע 70, וסטיית התקן הייתה 10.

במבחן השני היה הציון הממוצע 79, וסטיית התקן הייתה 12.

1. בוחרים באקראי מועמד שנבחן במבחן הראשון.
   מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן?
2. בוחרים באקראי מועמד שנבחן במבחן השני.
   מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן?
3. בוחרים באקראי מועמד שנבחן באחד מהמבחנים.
   מהי ההסתברות שהוא עבר את המבחן?

הקשר בין שני משתנים כמותיים – ניבוי ורגרסיה לינארית (16 שעות)

מטרות על

1. הבנת המושג של קשר בין שני משתנים כמותיים: קשר סיבתי, קשר סטטיסטי.
2. היכרות עם דיאגרמת פיזור עבור שני משתנים כמותיים.
3. ניבוי ערכי משתנה אחד על פי ערכו של משתנה אחר (בסיוע של דיאגרמת פיזור):
    1. הבנת המושג ניבוי.
    2. היכרות עם ניבוי באמצעות גרף הממוצעים.
4. מקדם המתאם:
    1. הבנת המשמעות של מקדם המתאם כמדד לקשר לינארי.
    2. היכרות עם התכונות של מקדם המתאם.
    3. חישוב מקדם המתאם.
5. ישר הרגרסיה:
    1. יכולת לזהות על פי דיאגרמת הפיזור אם ישר הרגרסיה מועיל לניבוי.
    2. הכרת השימוש בישר הרגרסיה לצורך ניבוי, במקרים בהם קיים קשר לינארי.
    3. הכרת הקשר בין מקדם המתאם ובין השיפוע של ישר הרגרסיה.
    4. מציאת ישר הרגרסיה.
6. הבנת מצבים בהם מודל הרגרסיה הלינארית עלול להוביל למסקנות שגויות.

תכנים

<u>קשר סטטיסטי בין שני משתנים כמותיים</u>

1. קריאת מידע מדיאגרמת פיזור נתונה.
2. בניית דיאגרמת פיזור (מומלץ להשתמש לשם כך בטכנולוגיה).
3. קביעה אם קיים קשר סטטיסטי בין שני המשתנים (ללא צורך בחישובים – רק על סמך הסתכלות על הנתונים המוצגים בצורה גרפית בדיאגרמת הפיזור).
4. קביעה של סוג הקשר (במידה וקיים): קשר חיובי או קשר שלילי, קשר דטרמיניסטי או לא (ללא צורך בחישובים – רק על סמך הסתכלות על הנתונים המוצגים בצורה גרפית בדיאגרמת הפיזור).
5.

דוגמאות למשימות אפשריות:

* על סמך דיאגרמת פיזור נתונה, קביעה אם קיים / לא קיים קשר בין שני משתנים כמותיים.
* על סמך דיאגרמת פיזור נתונה, קביעה של סוג הקשר (חיובי או שלילי) הקיים בין שני משתנים כמותיים.

* על סמך דיאגרמת פיזור נתונה, קביעה אם הקשר בין שני המשתנים הכמותיים הוא דטרמיניסטי או לא.

<u>הערה:</u> מומלץ להראות מספר דוגמאות ליצירת דיאגרמת פיזור מטבלת ערכי זוגות.

<u>גרף ממוצעים ושימושיו</u>

1. בניית גרף הממוצעים: חלוקה של ציר המשתנה הבלתי תלוי לרצועות, ובכל רצועה – חישוב או מתן הממוצע של המשתנה התלוי.
2. שימוש בגרף הממוצעים: הממוצע המתקבל הוא ערך הניבוי של המשתנה התלוי עבור כל ערכי המשתנה הבלתי תלוי השייכים לרצועה זו.
3. החלפת התפקידים של המשתנה התלוי והבלתי תלוי, באמצעות בנייה של הרצועות האופקיות.

דוגמאות למשימות אפשריות:

* בהינתן דיאגרמת פיזור, ניבוי של המשתנה התלוי על סמך המשתנה הבלתי תלוי – תוך שימוש בגרף הממוצעים.
* בהינתן דיאגרמת פיזור, החלפת תפקידי המשתנים (תלוי ובלתי תלוי) – תוך שימוש בגרף הממוצעים (ברצועות אופקיות). ממוצעים מטבלת ערכי זוגות.

<u>הערה:</u> מומלץ להראות מספר דוגמאות ליצירת גרף

<u>מקדם המתאם הלינארי</u>

1. מושג מקדם המתאם הלינארי בין המשתנים.
2. משמעות מקדם המתאם r כמדד כמותי לקיום קשר לינארי:

- משמעות סימן מקדם המתאם (קשר לינארי חיובי או שלילי).
- קביעה אם קיים קשר לינארי לפי קרבת מקדם המתאם r ל- ± 1.
- אם מקדם המתאם שווה ל- ± 1 אז הקשר הוא לינארי דטרמיניסטי, כלומר, הנקודות $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ נמצאות על קו ישר אחד.
- אם מקדם המתאם שווה ל- 0 אז אין קשר סטטיסטי לינארי בין המשתנים.

- קביעת עוצמת הקשר בין המשתנים:

$0.7 \le r < 1$ - קשר לינארי חיובי חזק בין x ו- y.

$0.4 \le r < 0.7$ - קשר לינארי חיובי בינוני בין x ו- y.

$0 \le r < 0.4$ - קשר לינארי חיובי חלש בין x ו- y.

באופן דומה לגבי קשר שלילי.

3. חישוב מקדם המתאם r

(מומלץ להשתמש בטכנולוגיה אם מספר הנתונים גדול). אפשר להשתמש בנוסחה המקוצרת: .

$$r = \frac{1}{s_x s_y}\left\{\frac{1}{N}[x_1y_1 + \cdots + x_ny_n] - \bar{x} \cdot \bar{y}\right\}$$

<u>ישר הרגרסיה</u>

1. מושג ישר הרגרסיה ומטרת ישר הרגרסיה.
2. בניית משוואת ישר הרגרסיה לניבוי ערך המשתנה y.

3. בניית ישר הרגרסיה $y - \underline{Y} = r\frac{S_Y}{S_X}(\ x - \underline{X})$ (מתוך הממוצעים וסטיות התקן של שני המשתנים ומקדם המתאם או על ידי שימוש בטכנולוגיה).

<u>הערות:</u>

1. מהנוסחה למקדם המתאם הלינארי ניתן לראות כי:
   i. הוא אינו משתנה תחת הוספת קבוע או שינוי היחידות של המשתנים. בפרט, מקדם המתאם הוא מספר טהור (ללא יחידות).
   ii. הוא סימטרי ביחס לשני המשתנים.
   iii. הוא תמיד בין -1 ל- 1.
2. ניבוי בעזרת ישר הרגרסיה הוא בעל משמעות רק כאשר קיים קשר סטטיסטי לינארי בין שני המשתנים. במצבים בהם אין קשר סטטיסטי בין המשתנים או כאשר הקשר אינו לינארי אין משמעות מעשית לישר הרגרסיה.
3. על פי רוב הניבוי אינו מדויק כי הקשר הלינארי כמעט תמיד לא מושלם.

4. ישר הרגרסיה עובר דרך נקודת הממוצעים של שני המשתנים שהיא $\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$.

5. יש שני ישרי רגרסיה: ניבוי של y על פי x וניבוי של x על פי y .

דוגמאות למשימות אפשריות:

* בהינתן דיאגרמת פיזור, לתת אומדן של מקדם המתאם.
* קביעה של מקדם המתאם של דיאגרמת פיזור נתונה מתוך רשימת אפשרויות נתונה.
* מציאת שני קווי הרגרסיה על פי הנתונים $r\underline{X},\ S_Y,\ S_X,\ \underline{Y}$,: קו הרגרסיה לניבוי y על פי x ולהיפך: קו הרגרסיה לניבוי x על פי y.
* שימוש בישר הרגרסיה לצורך ניבוי הערך של המשתנה התלוי כאשר נתון ערכו של המשתנה הבלתי תלוי.

נספח – דוגמאות

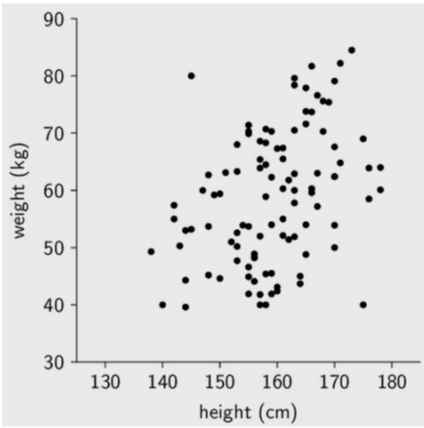
דוגמאות לקשר סטטיסטי בין שני משתנים כמותיים

<u>דוגמה</u>

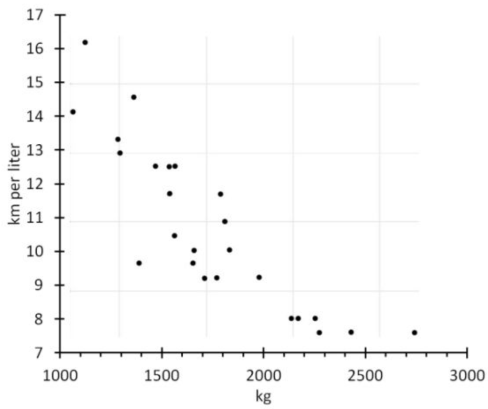
לפניכם מספר דיאגרמות פיזור. בכל אחת מהן, קבעו:

1. מהי האוכלוסייה?
2. מיהם המשתנים הכמותיים?
3. האם קיים קשר סטטיסטי בין שני המשתנים הכמותיים?
4. במידה וקיים קשר סטטיסטי, קבעו את סוג הקשר (חיובי או שלילי, דטרמינסטי או לא).

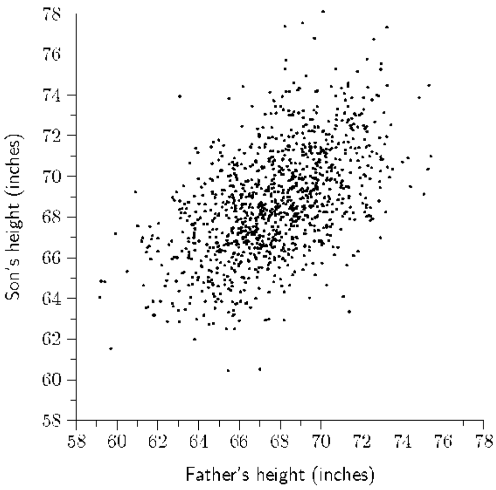
א. דיאגרמת פיזור של גובה ומשקל של מספר אנשים



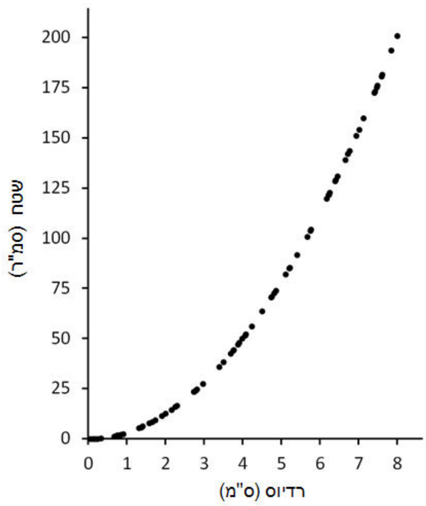
2. דיאגרמת פיזור של משקל וצריכת הדלק (בק"מ לליטר) עבור מספר רכבים



3. דיאגרמת פיזור של גובה האב וגובה הבן



4. דיאגרמת פיזור של הקשר בין רדיוס ושטח של מעגלים



(א' ו- ג' הן דוגמאות לקשר חיובי, ב' – דוגמה לקשר שלילי, ד' – קשר דטרמיניסטי לא לינארי)

<u>דוגמה</u>

במחקר שנערך בקרב גברים בגילאי 54 – 18 נמצא מתאם חיובי בין לחץ הדם שלהם לבין רמת ההכנסה שלהם. מה ניתן להסיק מכך:

1. לשני גברים בגיל המדגם שנבחרו באקראי, סביר יותר כי לזה בעל לחץ הדם הגבוה יותר תהיה הכנסה גבוהה יותר.
2. ככל שרמת לחץ הדם עולה אז רמת ההכנסה יורדת.
3. אין קשר בין רמת לחץ הדם לבין רמת ההכנסה.

דוגמה

לפניכם נתונים עבור ערכי המשתנה הבלתי תלוי (x) וערכי המשתנה התלוי (y).

x	97	92	100	78	80	55	61
y	85	82	95	77	81	40	57

סרטטו את הנתונים במערכת צירים, וקבעו אם קיים קשר סטטיסטי בין שני המשתנים.

אם קיים קשר סטטיסטי, קבעו:

1. האם הקשר חיובי או שלילי?
2. האם הקשר דטרמיניסטי או לא?

דוגמה

בכל אחד מהמקרים הבאים, זהו את האוכלוסייה ואת המשתנים, וציינו אם הייתם מצפים לראות קשר בין שני המשתנים. אם כן, ציינו אם הייתם מצפים לקבל קשר חיובי או שלילי, וציינו אם הוא דטרמיניסטי.

1. כמות הדלק במיכל של מכונית מסוימת ומספר הק"מ שהיא נסעה מאז מילוי הדלק האחרון.
2. סכום כל המספרים שהוגרלו בלוטו במשך חודש ומספר הלידות בירושלים באותו חודש.
3. מספר גני הילדים בכל עיר בישראל והרווח השנתי מקנסות על דו"חות חניה באותה עיר.
4. שנת הלידה של תושבי חיפה והגיל שלהם בשנה הנוכחית.
5. הכנסה חודשית של משפחה וצריכת החשמל של אותה המשפחה.
6. ציון במתמטיקה של תלמיד וציון בפיסיקה של אותו התלמיד.
7. מספר שנות הלימוד של אדם ושכרו של אותו האדם.
8. הגיל של אדם ומשקלו של אותו אדם.
9. זמן המתנה בתור לפקיד בבנק ומספר הפקידים באותו הבנק.
10. בזריקה חופשית של כדור, הזמן שעובר מרגע הזריקה וגובה הכדור מהקרקע.

דוגמה

בכל אחד מהמקרים הבאים התגלה קשר סטטיסטי חיובי. הציעו הסבר למקור הקשר.

1. הרווח היומי ממכירת גלידה בבריכות השחייה בישראל ומספר המגבות שאבדו בהן באותו יום.
2. מספר הקניונים בישראל בעשורים שונים ומהירות הגלישה הממוצעת באינטרנט בעולם.

3. מהירות הקריאה של תלמיד בבי"ס יסודי ומספר הנעל שלו.

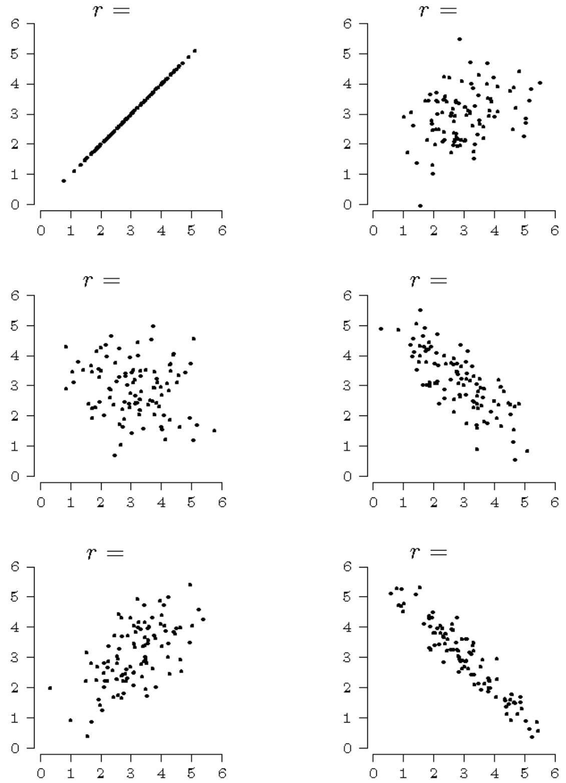
דוגמאות למקדם המתאם כמדד לעוצמת הקשר הלינארי

<u>דוגמה</u>

לפניכם דיאגרמות פיזור ורשימה של ערכי מקדמי המתאם שלהן:

$-0.75 \quad -0.93 \quad 0.27 \quad -0.20 \quad 1.0 \quad 0.63$

התאימו לכל דיאגרמה את מקדם המתאם שלה מהרשימה. הסבירו את בחירתכם.



<u>דוגמה</u>

לפניכם אוספים של נתונים. בכל אוסף, חשבו את מקדם המתאם ותארו את הנתונים בגרף.

א.

x	y
1	6
2	7
3	5
4	4
5	3
6	1
7	2

ב.

x	y
1	2
2	1
3	4
4	3
5	7
6	5
7	6

ג.

x	y
1	7
2	6
3	5
4	4
5	3
6	2
7	1

(א: $r = -0.93$ ב: $r = 0.82$ ג. $r = -1$)

הערה: אפשר גם באחת הדוגמאות לתת את S_x , S_y , S_{xy} ולבקשם לחשב את r על פי נתונים אלו.

<u>דוגמה</u>

בהינתן טבלת ערכים של הגובה והמשקל של מספר אנשים:

1. חשבו מהטבלה את הממוצע ואת סטיית התקן של כל אחד מהמשתנים.

ב. חשבו את מקדם המתאם .

<u>דוגמה</u>

רוצים לבדוק אם קיים קשר סטטיסטי בין מידת ההצלחה של תלמידים בבחינה מסכמת לבין ההשתתפות בשיעורי חזרה שנערכו לפני הבחינה.

לפניכם התוצאות, כאשר x מייצג את העובדה שהתלמיד כן / לא השתתף בשיעורי החזרה (0 = לא השתתף, 1 = השתתף), ו- y מייצג את הציון שקיבל התלמיד בבחינה המסכמת.

x	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
y	61	61	79	74	83	71	86	40	45	87	100	70	90	50	80

1. סרטטו את הנתונים.
2. חשבו את מקדם המתאם בין x ל- y.
3. האם קיים קשר לינארי בין שני המשתנים הללו? הסבירו.

דוגמה

מנהלת בית-ספר בדקה את הציונים של תלמידי כיתה מסוימת במבחן המסכם במתמטיקה ובמבחן המסכם בפיזיקה. היא מצאה שמקדם המתאם בין הציונים בשני המקצועות הוא 0.8.

כעבור מספר ימים החליטה המורה למתמטיקה להוריד 4% מהציון של כל תלמיד.

המורה לפיזיקה החליט להוריד 3% מהציון של כל תלמיד.

מה יהיה מקדם המתאם בין הציונים במתמטיקה ופיזיקה לאחר הורדת הציונים?

דוגמאות לניבוי לינארי בעזרת ישר הרגרסיה

דוגמה

בהינתן הערכים של הממוצעים וסטיות התקן של הגובה והמשקל של מספר אנשים, ובהינתן מקדם המתאם:

1. מצאו את משוואת ישר הרגרסיה לניבוי של המשקל לפי הגובה.
2. מצאו את הניבוי של המשקל עבור כל אחד מהגבהים מהרשימה.
3. האם ניתן להסיק מסקנה לגבי גובה על פי המשקל באמצעות קו הרגרסיה שמצאתם בסעיף א?

דוגמה

לצורך בדיקת הקשר בין ציוני תלמידים במתמטיקה (x) וציוני אותם תלמידים בפיזיקה (y), נבחרו באקראי 30 בוגרי תיכון ועל סמך הציונים שלהם בבחינות הבגרות בשני המקצועות נקבעו ישרי הרגרסיה:

$$x = 1.1\,y + 4$$

$$y = 0.7\,x + 11$$

1. מהו הציון הממוצע בכל אחת משתי הבחינות?
2. מהו מקדם המתאם בין הציונים של שני המקצועות?

דוגמה

בחלק מהאזורים במדינה מסוימת אין רישום של תאריכי לידה של תינוקות. לאחר בדיקה התברר שקיים מחקר סטטיסטי שמצא שישר הרגרסיה של ניבוי משקל תינוקות (y בק"ג) בברזיל על סמך הגיל שלהם (x בחודשים) הוא: . $y = 0.52\,x + 3.43$

כמו כן נמצא במחקר שהמשקל הממוצע של התינוקות הוא 10.2 ק"ג .סטיית התקן של המשקל היא 2.64 ק"ג, ומקדם המתאם בין המשקל לגיל התינוקות הוא 0.86.

1. מהו הגיל הממוצע של התינוקות ומהי סטיית התקן של גיל התינוקות?
2. מהי התחזית לגיל התינוק אם ידוע שמשקלו הוא 13 ק"ג?

דוגמה

תלמידים נבחנו בשני מבחנים במתמטיקה. להלן התוצאות:

במבחן הראשון: $\bar{x}=70$ $S_x = 5$,

במבחן השני: $\bar{y}=75$ $S_y = 8$,

המתאם בין שני המבחנים הוא: $r = 0.7$

1. תלמיד קיבל במבחן הראשון ציון של 80. העריכו מה יהיה הציון של אותו תלמיד במבחן השני.
2. מהי משוואת קו הרגרסיה לניבוי / ניבוי של הציון במבחן השני על פי הציון במבחן הראשון?

(פתרון: שיפוע קו הרגרסיה: $\frac{r \cdot S_y}{S_x} = \frac{0.7 \cdot 8}{5} = 1.12$. הישר עובר דרך הנקודה: $(\bar{x}, \bar{y})$ כלומר,

דרך (70 , 75). נציב ערך זה במשוואת הישר ונקבל את המשוואה: $y = 1.12x - 3.4$)

3. מהו הניבוי של הציון במבחן השני עבור תלמיד שקיבל 70 במבחן הראשון?
4. מהי משוואת קו הרגרסיה לניבוי / ניבוי של הציון במבחן הראשון על פי הציון במבחן השני?

(פתרון: $y = 2.2857x - 85$).

5. תלמיד קיבל במבחן השני ציון של 86.2. מהי התחזית (ניבוי) של הציון שלו במבחן הראשון? השוו את תשובתכם לסעיף א'.

<u>הערה</u>: ניתן לשאול את השאלות בסדר הבא:

1. מהי משוואת קו הרגרסיה לניבוי של הציון במבחן השני על פי הציון במבחן הראשון?
2. תלמיד קיבל במבחן הראשון ציון של80 . מהי התחזית לציון של אותו תלמיד במבחן השני?
3. תלמיד קיבל במבחן השני ציון של 86.2. מהי התחזית של הציון שלו במבחן הראשון? השוו את תשובתכם לסעיף ב'.
4. מהי משוואת קו הרגרסיה לניבוי / ניבוי של הציון במבחן הראשון על פי הציון במבחן השני?

<u>שאלות לדוגמה ממרכז המורים :</u>

https://newhighmath.haifa.ac.il/images/data2/new_prog2022/4_units/Regression_Student.pdf