**תוכנית הלימודים החדשה – גיאומטריה במרחב – כיתה י"ב ( 40 שעות)**

 **מטרות כלליות**

התלמיד יפתח תפיסה מרחבית.

התלמיד יכיר תכונות של גופים שונים במרחב.

התלמיד ידע לקרוא את השרטוטים של הגופים הנלמדים במרחב.

התלמיד ידע להשתמש בווקטורים לצורך פתרון בעיות גיאומטריות.

התלמיד ישתמש בידע מכל תחומי הגיאומטריה לצורך חישובים ויישומים שונים.

התלמיד ידע להשתמש בשלושת הייצוגים בגיאומטריה: ייצוג מילולי, ייצוג סימבולי, ייצוג ויזואלי, ולשלב ביניהם.

התלמיד יבין את הצורך בבקרה על התוצאות המתקבלות, ויפתח מיומנות של בקרה.

התלמיד יפתח מיומנויות בסיסיות בפעולות עם וקטור אלגברי כשלשה סדורה של מספרים ממשיים.

דגשים והערות:

* + - 1. בתרגילים יידרשו רק חישובים מספריים (ללא פרמטרים).
1. לכל תרגיל יש להוסיף שרטוט (פרט לתרגילים/סעיפים בתרגילים בהם צריך לקבוע אם נקודות נמצאות על אותו ישר או באותו מישור), רצוי במידת האפשר שרטוט דינמי במחשב.
2. יושם דגש על שילוב בין תכני הנדסת המרחב בגישה סינתטית להנדסת המרחב בגישה וקטורית (גיאומטרית ואלגברית).
3. חישובים של נפחי גופים יתבססו על שימוש בידע ובמיומנויות שנרכשו בגיאומטריה סינתטית , טריגונומטריה במישור ווקטורים גאומטריים ואלגבריים.

מומלץ לשלב שימוש בטכנולוגיה במהלך למידת הנושא (כגון תוכנות דינמיות, יישומונים וכדומה). שילוב כזה עשוי לתרום להמחשת הנלמד והבנה טובה יותר של מושגים בסיסיים במרחב ותכונות הגופים.

השימוש בווקטורים עשוי לעזור להתגבר על חלק מהקשיים הצפויים בראייה מרחבית.

**מושגים בסיסיים במרחב, תכונות גופים**

**תכנים**

מושגים בסיסיים במרחב:

א. קביעת מישור על ידי:

- שני ישרים נחתכים או מקבילים,

- שלוש נקודות שאינן על ישר אחד,

- ישר ונקודה מחוץ לישר,

ב. מצב הדדי בין שני מישורים:

- מישורים נחתכים, ישר החיתוך,

- מישורים מקבילים,

ג. מצב הדדי בין ישר למישור:

- ישר נמצא במישור,

- ישר ומישור נחתכים בנקודה אחת,

- ישר ומישור מקבילים.

ד. מצב הדדי בין שני ישרים שונים:

- נחתכים,

- מצטלבים,

- מקבילים.

ה. ישר מאונך למישור: הגדרה, התנאי המספיק.

ו. מרחק בין נקודה למישור.

גופים ותכונותיהם:

א. מנסרה (לאו דווקא ישרה): הגדרה, מונחים עיקריים: בסיס, פאה, מקצוע, אלכסון, גובה. מנסרה ישרה. מקרים פרטיים: תיבה, קובייה.

ב. גליל ישר מעגלי: הגדרה, מונחים עיקריים: בסיסים, רדיוס הבסיס, גובה.

ג. פירמידה: הגדרה, מונחים עיקריים: קודקוד הראש, בסיס, פאה, מקצועות, גובה. פירמידה ישרה.

ד. חרוט ישר מעגלי: הגדרה, מונחים עיקריים: בסיס, קודקוד הראש, גובה.

**וקטור בגישה גיאומטרית**

**תכנים**

מושג הווקטור:

מושג הווקטור (במישור ובמרחב) לפי הגישה הגיאומטרית, סימון. וקטור האפס. אורך וקטור. וקטורים קולינאריים, וקטורים שווים, וקטורים נגדיים.

פעולות בווקטורים גיאומטריים:

חיבור, חיסור, כפל בסקלר.

תכונות הפעולות בווקטורים: חוק הקיבוץ וחוק החילוף של החיבור, חוק הקיבוץ של כפל בסקלרים $ t∙\left(s∙\overline{u}\right)=(t∙s)∙\overline{u}$, חוק הפילוג של כפל בסקלרים $\left(t+s\right)\overline{u}=t\overline{u}+s\overline{u}$, חוק הפילוג בווקטורים $t\left(\overline{u}+\overline{v}\right)=t\overline{u}+t\overline{v}$ .

תנאי הכרחי ומספיק לקולינאריות של וקטורים.

צירוף לינארי של וקטורים:

מושג הצירוף הלינארי של וקטורים.

משפט (ללא הוכחה): כל וקטור במישור ניתן להצגה יחידה כצירוף לינארי של שני וקטורים לא קולינאריים במישור, וכל צירוף כזה נמצא במישור שנקבע על ידי שני וקטורים לא קולינאריים, או במישור מקביל אליו.

משפט מקביל במרחב: כל וקטור במרחב ניתן להצגה יחידה כצירוף לינארי של שלושה וקטורים שלא נמצאים באותו מישור .

**וקטור בגישה אלגברית**

**תכנים**

מערכת צירים במרחב:

היכרות מערכת צירים במרחב. שיעורי נקודה במרחב.

מקרים פרטיים: שיעורי נקודות הנמצאות באחד המישורים xy, xz, yz . שיעורי נקודות הנמצאות על הצירים.

הצגה אלגברית של וקטור:

וקטורי היחידה של הצירים. הגדרת הצגה אלגברית של וקטור.

שוויון, חיבור, כפל בסקלר של וקטורים בהצגה אלגברית. וקטורים קולינאריים בהצגה אלגברית.

**מכפלה סקלרית של וקטורים**

**תכנים**

זווית בין שני וקטורים:

הגדרה, זיהוי.

קוסינוס של זווית ישרה וקהה - הגדרה באמצעות הקשר cosα=-cos(180º-α).

המכפלה הסקלרית של שני וקטורים גיאומטריים:

הגדרה.

תכונות המכפלה הסקלרית: אורך וקטור: $\left|\overline{u}\right|=\sqrt{\overline{u}^{2}}$ ,

קומוטטיביות (חוק חילוף): $\overline{u}∙\overline{v}=\overline{v}∙\overline{u}$ , הומוגניות: $\overline{u}∙t\overline{v}=t(\overline{u}∙\overline{v)}$,

דיסטריבוטיביות (חוק פילוג): $\overline{u}∙\left(\overline{v}+\overline{w}\right)=\overline{u}∙\overline{v}+\overline{u}∙\overline{w}$ (ללא הוכחה),

מכפלה סקלרית מקוצרת: $(\overline{u}\pm \overline{v})^{2}=\overline{u}^{2}\pm 2\overline{u}∙\overline{v}+\overline{v}^{2}$ , $\left(\overline{u}+\overline{v}\right)\left(\overline{u}-\overline{v}\right)=\overline{u}^{2}-\overline{v}^{2}$.

חישובים פשוטים של אורכים וזוויות בעזרת מכפלה סקלרית. חישובי שטחים של הצורות הגיאומטריות שנלמדו ב- י', י"א.

ניצבות בין וקטורים:

וקטורים ששונים מווקטור האפס מאונכים זה לזה אם ורק אם המכפלה הסקלרית שלהם שווה ל- 0.

ניצבות בין וקטור למישור:

הגדרה. התנאי המספיק: אם וקטור (שונה מווקטור אפס) מאונך לשני וקטורים לא קולינאריים שנמצאים במישור או מקבילים לו אז הוקטור מאונך למישור.

מכפלה סקלרית של וקטורים בהצגה אלגברית:

חישוב המכפלה הסקלרית. אורך וקטור בהצגה אלגברית.

חישובי אורכים וזוויות בעזרת המכפלה הסקלרית. חישובי שטחים של הצורות הגיאומטריות שנלמדו ב- י', י"א.

שימוש במכפלה הסקלרית להוכחות ניצבות בין שני וקטורים, ניצבות בין וקטור למישור.

**חישובי נפחים של גופים**

**תכנים**

חישוב נפחים של הגופים הבאים:

המנסרה והגליל המעגלי הישר.

הפירמידה והחרוט המעגלי הישר.

הערות:

1. הנוסחאות לחישוב הנפחים ינומקו באופן אינטואיטיבי תוך התבססות על הדמיון במבנה של הגופים (מנסרות וגלילים ישרים, ובנפרד פירמידות וחרוטים ישרים) ועל עקרון קוואלירי.

הנימוק האינטואיטיבי ודוגמאות לכך יופיעו בספרי הלימוד.

2. חישובי הנפחים של הגופים ייעשו בעזרת הגישה של הקשר בין הגופים ועיקרון קוואליירי או בעזרת שימוש בנוסחאות לחישוב נפחים.

3. מומלץ לתת הסבר מדוע נפח פירמידה שווה לשליש מכפלת שטח הבסיס בגובה.

4. חישובי נפח של פירמידה שאיננה ישרה יהיו רק במצבים הבאים:

- נתונים שיעורי עקב הגובה של הפירמידה.

- קל לזהות את העקב ולחשב את שיעוריו (כגון, פירמידה שבה אחד המקצועות מאונך לבסיס).

- קודם לכן הוכח שווקטור הוא גובה הפירמידה בהתבסס על המכפלה הסקלרית.

- קל לחשב את אורך הגובה בעזרת משפט פיתגורס או שימוש בפונקציות טריגונומטריות במשולש ישר זווית או שימוש בווקטורים.

5. חישובי נפח של מנסרה שאיננה ישרה יהיו רק במצבים הבאים:

- נתונים שיעורי קצוות הגובה.

- קל לזהות ולחשב את השיעורים של קצוות הגובה.

- קודם לכן הוכח שווקטור הוא גובה המנסרה בהתבסס על המכפלה הסקלרית.

- קל לחשב את אורך הגובה בעזרת משפט פיתגורס או שימוש בפונקציות טריגונומטריות במשולש ישר זווית או שימוש בווקטורים.

6. בשאלות של חישובי נפחים, יוצעו פירמידות ומנסרות שבסיסיהם מצולעים שדרכי חישוב שטחיהם מוכרות לתלמידים לפי התוכנית של י' ו-י"א.

**הצעות לרצפי הוראה המשלבים וקטורים גאומטריים, וקטורים אלגבריים, גאומטריה סינתטית של המרחב ותכונות הגופים וחישובי נפחים.**

תכנון הוראת הגיאומטריה יכול להיעשות במספר דרכים.

להלן שלוש אפשרויות לרצף של הוראת הנושאים השונים. ניתן להתנהל ברצפים נוספים.

**אפשרות ראשונה**

|  |  |
| --- | --- |
| **נושא** | **הערות/דגשים** |
| 1. הכרות עם מושגים בסיסיים במרחב.  |  |
| 2. גופים ותכונותיהם: פירמידה ומנסרה.  | זיהוי פאות כחלקי מישורים, מקצועות כחלקים של ישרי החיתוך של מישורי הפאות, גובה בכל אחד מהגופים, בהסתמך על ההיכרות עם המושגים הבסיסיים ועל מנת לחזקה. דמיון מול הבדלים מהותיים במבנה של שני סוגי הגופים. |
| 3. גופים ותכונותיהם:חרוט מעגלי ישר וגליל מעגלי ישר.  | גופי סיבוב. דמיון והבדלים מהותיים במבנה של שני סוגי הגופים. דמיון במבנה של פירמידות וחרוטים, ושל מנסרות וגלילים. |
| 4. וקטור בגישה גיאומטרית. | הדוגמאות והתרגילים יתבססו על צורות במישור (כמו משולשים, מקביליות וכו') והגופים.  |
| 5. וקטור בגישה אלגברית. | הדוגמאות והתרגילים יתבססו על הצורות והגופים.במקרה הצורך מצבים הדדיים של מישורים, ישרים ונקודות במרחב ייקבעו על סמך ניתוח שיעורי נקודות המגדירות את הווקטורים וכיו"ב. למשל, וקטור שאחד הקצוות שלו הוא נקודה שאף שיעור שלה איננו 0, לא נמצא באף מישור קואורדינטות, הווקטור (3,-1,0) נמצא במישור xy או במישור מקביל לו, אם שלוש נקודות יוצרות שני וקטורים קולינאריים אז הן נמצאות על אותו ישר, שימוש בצירופים לינאריים של וקטורים וכו'.  |
| 6. מכפלה סקלרית.חישובי זוויות, אורכים ושטחים. | משמעות סימן הכפל לפי הקשר: מכפלת מספרים, מכפלת וקטור בסקלר, מכפלה סקלרית. דמיון והבדלים בין חוקי כפל המספרים לחוקי המכפלה הסקלרית (למשל, דמיון לנוסחאות הכפל המקוצר והבדלים במקרים של צמצום, מכפלה שווה לאפס).יושם דגש על שימושים במכפלה סקלרית למציאת זוויות, אורכים, הוכחת ניצבות ישרים, ישר ומישור.  |
| 7. חישוב נפחים של הגופים. | ההצגה האינטואיטיבית של ביסוס הנוסחאות לנפח (ראו הערה אחרי טבלאות הרצפים האפשריים).שימוש בידע ובמיומנויות שנרכשו בגיאומטריה סינתטית, טריגונומטריה במישור ווקטורים.  |

**אפשרות שנייה**

|  |  |
| --- | --- |
| **נושא** | **הערות/דגשים** |
| * 1. היכרות עם גופים:
* פירמידה ומנסרה,
* חרוט מעגלי ישר וגליל מעגלי ישר.
 | פאונים; זיהוי פאות כחלקי מישורים, מקצועותכחלקים של ישרי החיתוך של מישורי הפאות; גופי סיבוב, דמיון מול הבדלים מהותיים במבנה של שני סוגי הגופים: גופי הסיבוב (חרוטים וגלילים) לעומת הפאונים (מנסרות ופירמידות). דמיון מול הבדלים מהותיים במבנה של שני סוגי  הגופים: גלילים ומנסרות, וחרוטים ופירמידות. |
| 2. וקטור בגישה גיאומטרית.  | הדוגמאות והתרגילים יתבססו על הצורות במישור (כמו משולשים, מקביליות וכו') והגופים.  |
| 3. מושגים בסיסיים במרחב:סעיפים א' – ד' מתוך תכני הנושא.שילוב עם הנושאים הרלוונטיים מתוך הווקטורים בגישה גיאומטרית. | הנושא ייקשר לגופים אותם הכירו התלמידים בשלב מוקדם יותר.בין היתר, התלמידים ינתחו שייכות של קודקודים לפאות ולמקצועות, שייכות מקצועות לפאות, יקבעו אילו קודקודים קובעים פאה של מנסרה או פירמידה, בסיס או מישור אחר, וכיו"ב. |
| 4. וקטור בגישה אלגברית. | הדוגמאות והתרגילים יתבססו על הצורות והגופים.במקרה הצורך מצבים הדדיים של מישורים, ישרים ונקודות במרחב ייקבעו על סמך ניתוח שיעורי נקודות המגדירות את הווקטורים וכיו"ב. למשל, וקטור שאחד הקצוות שלו הוא נקודה שאף שיעור שלה איננו 0, לא נמצא באף מישור קואורדינטות, ווקטור בעל שיעורים (3,-1,0) נמצא במישור xy או במישור מקביל לו, אם שלוש נקודות יוצרות שני וקטורים קולינאריים אז הן נמצאות על אותו ישר, שימוש בצירופים לינאריים של וקטורים וכו'.  |
| 5. מכפלה סקלרית של וקטורים(ללא ניצבות של וקטור למישור).חישובי זוויות, אורכים, שטחים.  | משמעות סימן הכפל לפי ההקשר: מכפלת מספרים, מכפלת וקטור בסקלר, מכפלה סקלרית. דמיון והבדלים בין חוקי כפל המספרים לחוקי המכפלה הסקלרית (למשל, דמיון לנוסחאות הכפל המקוצר והבדלים במקרים של צמצום, מכפלה שווה לאפס).יושם דגש על שימושים במכפלה סקלרית למציאת זוויות, אורכים, הוכחת ניצבות ישרים.  |
| 6. מושגים בסיסיים במרחב:סעיפים ה' – ו' (ישר מאונך למישור, מרחק בין נקודה למישור).מושג של גובה בכל אחד מארבעת סוגי הגופים.ניצבות של וקטור למישור בגישה גיאומטרית ובגישה אלגברית.  | עבור גופים לא ישרים יהיה נתון וקטור ויהיה צורך להוכיח שהוא גובה. שימוש במכפלה סקלרית להוכחת ניצבות ישר ומישור.  |
| 7. חישוב נפחים של גופים. | ההצגה האינטואיטיבית של ביסוס נוסחאות לנפח (ראו הערה אחרי טבלאות הרצפים האפשריים).חישובי זוויות, אורכים ושטחים ייעשה בעזרת שימוש בווקטורים, בידע גיאומטרי כגון משפט פיתגורס, שימוש בטריגונומטריה במישור.  |

**אפשרות שלישית**

הערה: הצעה זו מלווה במספר דוגמאות להתוויית דרך הוראה ברוח התוכנית.

|  |  |
| --- | --- |
| **נושא** | **הערות/דגשים** |
| נושא 1: קביעת מישור על ידי:- שני ישרים נחתכים,- שלוש נקודות שאינן על ישר אחד,- ישר ונקודה מחוץ לישר.מישורים נחתכים, ישר חיתוך.וקטור בגישה גיאומטרית. | שני הנושאים של קביעת מישור ווקטור גיאומטרי הנם נושאים בסיסיים וקשורים זה בזה. אפשר להתחיל מכל אחד מהם. בסוף למידת הנושא התלמידים יבינו שאפשר להגדיר מישור על ידי ישרים ונקודות כמפורט בגישה סינתטית, או על ידי שני ווקטורים לא קולינאריים, וכן יבינו את הקשר בין שתי צורות אלה של הצגת מישור.הערה: מישורים מקבילים יילמדו בשלב מאוחר יותר.**ראו דוגמה למשימת הוראה / למידה בנושא 1 אחרי טבלה זו** |
| נושא 2מצב הדדי בין ישר למישור:- ישר נמצא בתוך מישור,- ישר ומישור נחתכים בנקודה אחת,- ישר ומישור מקבילים.מצב הדדי בין שני ישרים שונים:- נחתכים, - מצטלבים,- מקבילים.מישור הנקבע על ידי שני ישרים מקבילים.מישורים מקבילים.תיאור כל וקטור במרחב באמצעות שלושה וקטורים שלא נמצאים במישור אחד.  מערכת צירים במרחב. שיעורי נקודה במרחב. | ישר מאונך למישור: הגדרה, התנאי המספיק - יילמד לאחר המכפלה הסקלרית.שילוב עם הווקטורים בגישה גיאומטרית.ראו **דוגמה למשימת הוראה / למידה בנושא 2 אחרי טבלה זו.** |
| נושא 3גופים ותכונותיהם.  | כולל שילוב עם הווקטורים בגישה גיאומטרית. |
| נושא 4וקטור בגישה אלגברית.  | הדוגמאות והתרגילים יתבססו על הגופים.במקרה הצורך מצבים הדדיים של מישורים, ישרים ונקודות במרחב ייקבעו על סמך ניתוח שיעורי נקודות המגדירות את הווקטורים וכיו"ב. למשל, וקטור שאחד הקצוות שלו הוא נקודה שאף שיעור שלה איננו 0, לא נמצא באף מישור קואורדינטות, הווקטור(3,-1,0) נמצא במישור xy או במישור מקביל לו, אם שלוש נקודות יוצרות שני וקטורים קולינאריים אז הן נמצאות על אותו ישר, שימוש בצירופים לינאריים של וקטורים וכו'.  |
| נושא 5מכפלה סקלרית של שני וקטורים גיאומטריים ותכונותיה.ניצבות בין וקטורים.חישובי זוויות, אורכים, שטחים. | משמעות סימן הכפל לפי הקשר: מכפלת מספרים, מכפלת וקטור בסקלר, מכפלה סקלרית. דמיון והבדלים בין חוקי כפל המספרים לחוקי המכפלה הסקלרית (למשל, דמיון לנוסחאות הכפל המקוצר והבדלים במקרים של צמצום, מכפלה שווה לאפס).יושם דגש על שימושים במכפלה סקלרית למציאת זוויות לצורך מציאת אורכים, הוכחת ניצבות ישרים. |
| נושא 6ישר מאונך למישור: הגדרה, התנאי המספיק.מרחק בין נקודה למישור.ניצבות בין וקטור למישור.מכפלה סקלרית של שני וקטורים בגישה אלגברית.אורך וקטור בהצגה אלגברית. חישובי אורכים, זוויות , שטחים.  | שילוב בין הגדרת הניצבות בגישה סינתטית לבין שימוש בווקטור בגישה גיאומטרית ובגישה אלגברית.**ראו דוגמה למשימת הוראה / למידה בנושא 6 אחרי טבלה זו.** |
| נושא 7חישוב נפחים של גופים. | ההצגה האינטואיטיבית של ביסוס נוסחאות לנפח (ראו הערה אחרי טבלאות הרצפים האפשריים).שימוש בידע ומיומנויות שנרכשו בגיאומטריה סינתטית, טריגונומטריה במישור ווקטורים.  |

הערה:

ההצגה האינטואיטיבית של ביסוס הנוסחאות לנפח מנסרות וגלילים ביחד, וגם של פירמידות וחרוטים ביחד, וכן לעובדה שנפח כל פירמידה / חרוט שווה לשליש של נפח מנסרה / גליל בעלי אותו בסיס ואותו גובה, ייעשה בעיקר במסגרת הוראה בכיתה/ קריאה מהספר. עם זאת, במסגרת התרגילים, התלמידים יופנו לשיקולים אלה. ביסוס אינטואיטיבי של חישובי נפחים הוא חלק של התוכנית, כמו כן גם תרגילים המאפשרים דרכים אלטרנטיביות לפתרון בעיות המופיעות בתוכנית. **ראו דוגמה למשימת הוראה / למידה בנושא 7 (של כל הרצפים) בהמשך.**

 **דוגמאות של משימות למידה/הוראה לאפשרות שלישית של רצף ההוראה**

**דוגמה למשימות למידה/הוראה בנושא 1.**

**משימה 1:**

הערות:

- שלבי המשימה קשורים להופעת עצמים בשרטוט המצ"ב בקובץ ["מישור על ידי שלוש נקודות וכל האפשרויות האחרות קובץ למשימה 1"](file:///C%3A%5CUsers%5CGregory%5CAppData%5CLocal%5CMicrosoft%5CWindows%5CINetCache%5CIE%5CSO5VPC76%5C%D7%9E%D7%99%D7%A9%D7%95%D7%A8%20%D7%A2%D7%9C%20%D7%99%D7%93%D7%99%20%D7%A9%D7%9C%D7%95%20%D7%A0%D7%A7%D7%95%D7%93%D7%95%D7%AA%20%D7%95%D7%9B%D7%9C%20%D7%94%D7%90%D7%A4%D7%A9%D7%A8%D7%95%D7%99%D7%95%D7%AA%20%D7%94%D7%90%D7%97%D7%A8%D7%95%D7%AA%20%D7%A7%D7%95%D7%91%D7%A5%20%D7%9C%D7%9E%D7%A9%D7%99%D7%9E%D7%94%201.ggb). אם אין אפשרות להשתמש בפלטפורמה של גאוגברה, יש לספק את השרטוטים לכל שלב על בסיס השרטוט של השלב הקודם.

- אם משתמשים בקובץ גאוגברה – מומלץ לשנות על ידי הגרירה את מיקומן של הנקודות A, C - בשלבים השונים של ביצוע המשימה כדי להבין טוב יותר מה פירוש "להגדיר מישור".

- מומלץ לסובב את השרטוט בכיוונים שונים כדי לראות את המצבים ההדדיים של האלמנטים המופיעים בו ולמצות את הייצוג הוויזואלי המתאפשר על ידי התוכנה.

בשרטוט מסומן מישור ובו נקודה O וכן שתי נקודות A, C מחוץ למישור. שלוש נקודות אלה מגדירות מישור נוסף לזה המסומן בשרטוט. נסמן אותו α. (שלבים 1-4 בקובץ).

התבססו על הנתונים שבשרטוט ובצעו את המשימות הבאות:

1. רשמו לפחות שני ישרים המגדירים את המישור α (המישור בצבע תכלת שבשרטוט, שלבים 1-4 בקובץ).
2. בעזרת הנקודות A, O, C רשמו ישר ונקודה מחוצה לו המגדירים את המישור α. האם זה הצירוף היחיד של נתונים המגדיר את המישור? אם כן – הסבירו מדוע. אם לא – הציעו צירוף נוסף. (שלבים 5-7 בקובץ).
3. (שלבים 8-10 בקובץ): בשרטוט מסומנים שלושה וקטורים. רשמו את שלושת הווקטורים לפי נקודות ההתחלה והסוף שלהם.
4. אחד משלושת הווקטורים הוא סכום של השניים האחרים. רשמו את תרגיל החיבור המתאים.
5. רשמו זוג וקטורים המגדירים את המישור α. האם זהו זוג הווקטורים היחיד שמגדיר את המישור (הסתמכו על הנתונים בלבד)? נמקו את תשובתכם.
6. בשרטוט, נקודה B היא אמצע הקטע $OA$, ונקודה D היא אמצע הקטע $OC$. הביעו את הווקטורים $\vec{AC}$ ו- $\vec{BD}$ באמצעות הווקטורים $\vec{OC}$ ו- $\vec{OA}$
7. האם הווקטורים $\vec{BD}$ , $\vec{OD}$ מגדירים את המישור α?
8. מהו המצב ההדדי של הווקטורים $\vec{AC}$ ו- $\vec{BD}$ ?
9. בהמשך בנושא 2 אפשר להוסיף סעיף זה. האם שני וקטורים אלה מגדירים את המישור α? תנו תשובה בשתי דרכים שונות (בהסתמך על הידע הגאומטרי שלכם וכן בהסתמך על הידע שלכם בחשבון וקטורים (שלבים 12-14 בקובץ)).

**משימה 2:**

הערות: שלבי המשימה קשורים להופעת עצמים בקובץ ["מישור על ידי שלוש נקודות וכל האפשרויות האחרות קובץ למשימה 2".](file:///C%3A%5CUsers%5CGregory%5CAppData%5CLocal%5CMicrosoft%5CWindows%5CINetCache%5CIE%5CSO5VPC76%5C%D7%9E%D7%99%D7%A9%D7%95%D7%A8%20%D7%A2%D7%9C%20%D7%99%D7%93%D7%99%20%D7%A9%D7%9C%D7%95%20%D7%A0%D7%A7%D7%95%D7%93%D7%95%D7%AA%20%D7%95%D7%9B%D7%9C%20%D7%94%D7%90%D7%A4%D7%A9%D7%A8%D7%95%D7%99%D7%95%D7%AA%20%D7%94%D7%90%D7%97%D7%A8%D7%95%D7%AA%20%D7%A7%D7%95%D7%91%D7%A5%20%D7%9C%D7%9E%D7%A9%D7%99%D7%9E%D7%94%202%20.ggb) אם אין אפשרות להשתמש בפלטפורמה של גאוגברה, יש לספק את השרטוטים לשלבי המשימה העיקריים על בסיס השרטוט של השלב הקודם.

* + - 1. בשרטוט מסומנים הצירים Ox, Oy והמישור אותו הם מגדירים. נקודה O היא ראשית הצירים, והיא נמצאת במישור זה. כמו כן, נתון מישור נוסף, נסמן אותו α. (שלבים 1-4 בקובץ, הערה כבר בשלב הזה חשוב לסובב את השרטוט כדי למצות את הייצוג הוויזואלי המתאפשר על ידי התוכנה).

התבססו על הנתונים שבשרטוט ובצעו את המשימות הבאות:

1. נקודה E נמצאת על ישר החיתוך בין שני המישורים. האם מופיע בשרטוט ישר השייך לשני המישורים? אם כן – מהו? אם לא – מדוע?
2. הסבירו מדוע הווקטור $\vec{OE}$ נמצא במישור המוגדר על ידי Ox, Oy ומופיע גם בשרטוט השמאלי (שלבים 1-8 בקובץ). 
3. הנקודהF מסומנת בשרטוט השמאלי על ציר y. איזה מישור מגדירים הישרים FE, OE? (שלבים 9-10 בקובץ).
4. שרטטו את וקטור הסכום של שני הווקטורים $\vec{OF}, \vec{OE}$. סמנו את נקודת הקצה שלו ב-M. האם הנקודה M שייכת למישור α? אם לא – הציעו שינוי בשרטוט (אם צריך גם בהנחיות למיקום של נקודה F) שבעקבותיו נקודה זו תהיה במישור זה. (הערה שינוי אפשרי הוא שנקודה F תהיה למשל גם היא על ישר החיתוך של שני המישורים. כמובן אפשר להציע לבחור אותה באופן אקראי במישור α).
5. בחרו נקודהK כלשהי במישור המוגדר על ידי הנקודות O, E,F , כאשר הנקודה F נמצאת על ציר y ולא בראשית הצירים. האם אפשר להביע את הווקטור $\vec{OK}$ באמצעות שני וקטורים אחרים לבחירתכם מבין שלושת הווקטורים $\vec{OF}, \vec{OE}$, $\vec{FE}$? נמקו את תשובתכם.

**דוגמה למשימת הוראה / למידה בנושא 2**.

הערות:

- שלבי המשימה קשורים להופעת עצמים בשרטוט המצ"ב בקובץ "[תרגיל לנושא 2](file:///D%3A%5C%5C26.3.17%5C%5C%D7%AA%D7%9B%D7%A0%D7%99%D7%AA%20%D7%9C%D7%99%D7%9E%D7%95%D7%93%D7%99%D7%9D%5C%5C%D7%99%D7%91%5C%5C%D7%AA%D7%A8%D7%92%D7%99%D7%9C%20%D7%9C%D7%A0%D7%95%D7%A9%D7%90%202.ggb)". אם אין אפשרות להשתמש בקובץ גאוגברה, יש לספק את השרטוטים לכל שלב על בסיס השרטוט של השלב הקודם.

- אם משתמשים בקובץ גאוגברה – מומלץ לשנות על ידי הגרירה את מיקומן של הנקודות בשלבים שונים של ביצוע המשימה בהתאם לצורך. כמוכן, מומלץ לסובב את השרטוט בכיוונים שונים כדי לראות את המצבים ההדדיים של האלמנטים המופיעים בו.

בשרטוט מסומנות שלוש נקודות A, B, C. כמו-כן, מסומנים בשרטוט צירים x, y, z וראשית הצירים O.

1. אילו ישרים מגדירים את המישור המסומן בצד הימני של השרטוט? 
2. (שלבים 1-4). הסבירו מדוע לא רואים את הנקודות A,B , C בצד השמאלי של המישור.
3. נסמן ב-α את המישור המוגדר על ידי שלוש הנקודות A,B , C. מה אפשר לדעת על המצב ההדדי בין הישרBC המסומן בשרטוט לבין המישור α? בין הישר BC לבין המישור המוגדר על ידי הצירים x, y?
נמקו את תשובותיכם, ולאחר מכן סובבו את השרטוט כדי לבדוק את נכונות תשובתכם. הערה שאלה זו פונה לייצוג וויזואלי שמתאפשר באמצעות תוכנה דינמית. אם אין אפשרות להשתמש בתוכנה, חלק מהמשימה לא יהיה אפשרי, ויהיה אפשר להסתפק בתשובה חלקית. כתשובה מנומקת אפשר לקבל למשל תשובה כזאת: הנקודות B, Cאינן נמצאות במישור xy ולכן גם הישר BC לא נמצא במישור זה. יכול להיות שהוא מקביל לו או חותך אותו. אם מסובבים את השרטוט, רואים שהנקודות נמצאות משני צידי המישור ולכן הישר חותך אותו.
4. גררו אחת הנקודות (למשל, נקודה B) כך שהיא תיראה בצד השמאלי של השרטוט (והנקודות A, C לא יופיעו בצד השמאלי של השרטוט).
מה אפשר לדעת על המצב ההדדי בין ישר BA לבין מישור xy?
5. בשרטוט הופיע ישר g. האם הוא שייך למישור α? האם הוא שייך למישור המוגדר על ידי הצירים x, y ? שימו לב: ישר זה מופיע גם בצד השמאלי של השרטוט (שלב 7). 
6. (שלבים 8-16). נבחר שתי נקודות D, E על הישר g ונסמן וקטורים $\overbar{OE}$=**v**
, $\overbar{OD}$=**u**, $\overbar{OA}$=**b**, $\overbar{OB}$=**c**, **w**=$\overbar{OC}$
האם אפשר להציג את הווקטור $\overbar{OA}$=**b** באמצעות הווקטורים **u, v**? נמקו את תשובתכם.
7. הציעו שלושה וקטורים מבין אלה הנתונים בשרטוט שאמצעותם אפשר להציג את הווקטור $\overbar{OA}$=**b**.
8. האם אפשר להציג את הווקטורים **u, v** על ידי הווקטורים **b, c, w**? נמקו את תשובתכם. נסו להסביר מאיפה נובע ההבדל בין תשובותיכם לשאלות 6, 8.

**דוגמה למשימה הוראה / למידה בנושא 6.**

השרטוט לתרגיל 6 מופיע בקובץ גאוגברה בשם [תרגיל 6](file:///D%3A%5C26.3.17%5C%D7%AA%D7%9B%D7%A0%D7%99%D7%AA%20%D7%9C%D7%99%D7%9E%D7%95%D7%93%D7%99%D7%9D%5C%D7%99%D7%91%5C%D7%AA%D7%A8%D7%92%D7%99%D7%9C%20%206.ggb). למרות שהדוגמה כאן מנוסחת ללא מספרים, בהתאם לנאמר בראשית התוכנית, התלמידים אמורים לקבל את כל הנתונים בצורה מספרית.

בשרטוט נתונים שלושה וקטורים $\overline{w}=\vec{OA}$, $\overline{v}=\vec{OB}$ , $\overline{u}=\vec{OE}$. על וקטורים אלה בנו מנסרה OBCEAHGF כך שהבסיס שלה הוא המקבילית הבנויה על הווקטורים $\overline{u}$ , $\overline{v}$ והמקצוע השלישי הוא הווקטור $\overline{w}$ .

1. שרטטו וקטורים הנמצאים על כל שאר מקצועות המנסרה. הביעו את כל הווקטורים הנמצאים על מקצועות המנסרה בעזרת הווקטורים $\overline{w}$, $\overline{u}$ , $\overline{v}$.
2. רשמו וקטורים שהם אלכסוני המנסרה (ולא אלכסוני פאותיה) והביעו אותם בעזרת הווקטורים $\overline{w}$, $\overline{u}$ , $\overline{v}$.
3. האם זוהי מנסרה ישרה? נמקו את תשובתכם.
4. נקודהK היא נקודת חיתוך האלכסונים של הפאה העליונה של המנסרה. נקודה זו חיברו עם כל הקודקודים של הפאה התחתונה OECB. איזה גוף הוא KOECB?
5. סמנו וקטורים הנמצאים על מקצועות הפירמידה.
(1) האם אפשר להביע באמצעות הווקטורים $\overline{u}$ , $\overline{v}$ בלבד את הווקטורים הנמצאים על מקצועות הפירמידה KOECB? אם לא את כל המקצועות – האם אפשר להביע חלק מהם? אילו?
(2) האם אפשר להביע וקטורים הנמצאים על מקצועות הפירמידה באמצעות הווקטורים $\overline{w}$, $\overline{u}$ , $\overline{v}$? הביעו את כל המקצועות הפירמידה באמצעות הווקטורים $\overline{w}$, $\overline{u}$ , $\overline{v}$. **.**
6. הביעו וקטור הנמצא על גובה הפירמידה באמצעות הווקטורים $\overline{w}$, $\overline{u}$ , $\overline{v}$.
7. חשבו את אורך גובה הפירמידה.

**דוגמה למשימה הוראה / למידה בנושא 7**

הערה חומר זה ייכנס לספרי לימוד כחומר עיוני. עם זאת, ניתן ללוות אותו בדוגמאות ותרגילים לחישובי נפח כאלטרנטיבה לשיטות המתבססות על וקטורים ועל חישובים טריגונומטריים.

דוגמה למשימת תרגול היא דוגמה מס' 12 ברשימת הדוגמאות בהמשך הקובץ.

1. נפח מנסרה / גליל
2. הסבר ברמה האינטואיטיבית לכך שנפח מנסרה ישרה ונפח של גליל מעגלי ישר מחשבים באותו אופן: כשם ששטחו של מצולע משוכלל חסום במעגל מתקרב לשטח המעגל כאשר מספר צלעות הולך וגדל, כך נפח מנסרה שבסיסה – מצולע כזה, הולך ומתקרב לנפח הגליל. [ראו הדגמה דינאמית.](file:///D%3A%5C%5C26.3.17%5C%5C%D7%AA%D7%9B%D7%A0%D7%99%D7%AA%20%D7%9C%D7%99%D7%9E%D7%95%D7%93%D7%99%D7%9D%5C%5C%D7%99%D7%91%5C%5C%D7%9E%D7%A0%D7%A1%D7%A8%D7%94%20%D7%95%D7%92%D7%9C%D7%99%D7%9C.ggb) לכן מבחינת חישובי נפח אין הבדל בנוסחה: **גם נפח הגליל כמו נפח המנסרה, שווה למכפלת שטח הבסיס בגובה.**
3. לגבי מנסרה לא ישרה – עקרון קווליארי מסביר מדוע גם נפחה מחושב באותו אופן, בדומה מאד להסבר במישור לכך ששטח מקבילית שווה לשטח מלבן בעל אותו גובה ואותה צלע המאונכת לגובה.
4. נפח פירמידה / חרוט:
5. כל קובייה אפשר לחתוך לשלוש פירמידות חופפות, ולכן נפח של פירמידה כזאת (ראו שרטוט) שווה לשליש נפח הקובייה:

<http://www.korthalsaltes.com/model.php?name_en=three%20pyramids%20that%20form%20a%20cube>

1. אם לשתי פירמידות **משולשות** בסיסים שווי שטח וגבהים שווים, אז בחתכים שלהן עם מישור המקביל לבסיסים מתקבלים משולשים שווי שטח. **הוכחה** באמצעות דמיון משולשים. הרעיון של ההוכחה – שני המשולשים שבחתך דומים למשולשי הבסיס עם אותו יחס דמיון שהוא היחס בין מרחק המישור החותך מקודקודי הפירמידות, לגובה הפירמידות.
2. האם זה יהיה נכון לכל שתי פירמידות בעלות בסיסים שווי שטח? התלמידים יכולים לשער, בסופו של דבר מגיעים ל**משפט,** אותו אפשר לנסח **ללא הוכחה.** כבסיס להעלאת ההשערה ולהסבר מדוע המשפט נכון, אפשר להשתמש [בהדגמה דינמית](file:///D%3A%5C26.3.17%5C%D7%AA%D7%9B%D7%A0%D7%99%D7%AA%20%D7%9C%D7%99%D7%9E%D7%95%D7%93%D7%99%D7%9D%5C%D7%99%D7%91%5C%D7%A4%D7%99%D7%A8%D7%9E%D7%99%D7%93%D7%95%D7%AA%20%D7%A2%D7%A7%D7%A8%D7%95%D7%9F%20%D7%A7%D7%95%D7%95%D7%9C%D7%99%D7%90%D7%A8%D7%99.ggb) (השתמשו בסליידר על מנת לשנות את גובה מישור החיתוך).
3. נתבונן בשתי פירמידות: אחת שמתקבלת כשליש קובייה, והשנייה[[1]](#footnote-1) – שגובהה שווה לגובה הקובייה ובסיסה – מצולע שרירותי. מ- (ג) ומעקרון קוואליארי נובע, שאם שטחי הבסיסים של שתי הפירמידות שווים ביניהם, אז גם נפח הפירמידה השנייה שווה לשליש מכפלת שטח הבסיס שלה בגובה.
4. אם כן, **נפח של כל פירמידה שווה לשליש מכפלת שטח הבסיס בגובה.**
5. אם שטח בסיס החרוט שווה ל – S - שטח בסיס פירמידה כלשהי, וגם הגבהים שלהם שווים (ראו שרטוט), אז: 
* רדיוס של בסיס החרוט שווה ל- .
* רדיוס מעגל החיתוך בין משטח החרוט לבין מישור החותך אותו שמרחקו מקודקוד הראש הוא h, שווה .
* על כן שטח חתך החרוט בגובה זה שווה $πr^{2}=π\left(\frac{h}{H}\sqrt{\frac{S}{π}}\right)^{2}=S\frac{h^{2}}{H^{2}}$
* היות שהיחס בין שטחי בסיס הפירמידה והחתך באותו גובה גם הוא שווה , מתקיימים התנאים של עקרון קוואלירי, ועל כן הנפח של חרוט מעגלי (ישר) שווה שליש מכפלת שטח הבסיס בגובה.

**דוגמאות** **לשאלות ותרגילים**

1. בסיס הפירמידה SABCD הוא מקבילית ABCD.

א. (1) רשום נקודה וישר שבעזרתם אפשר להגדיר

 את מישור הבסיס.



 (2) רשום שני ישרים נחתכים שבעזרתם אפשר

להגדיר את מישור הבסיס.

 (3) רשום שני ישרים מקבילים שבעזרתם אפשר

להגדיר את מישור הבסיס.

ב. הישר AB הוא ישר החיתוך של אלו שני

 מישורים?

ג. מה המצב הדדי:

(1) בין מישור הבסיס למישור SAB? אם הם

נחתכים רשום את ישר החיתוך.

(2) בין הישר DC למישור הבסיס?

(3) בין הישר DC למישור SAB?

(4) בין הישר DC לישר SB?



2. בסיס הפירמידה SABCD הוא מקבילית ABCD.

נקודהK נמצאת על מקצוע SC.

דרך K העבירו מישור מקביל למישור הבסיס.

המישור חותך את המקצועות SD, SA, SB בנקודות F, E, G בהתאמה.

 א. מהו המצב ההדדי בין הישרים FK ו- DC? נמק.

ב. הוכח כי המרובע KFEG הוא מקבילית.

ג. נתון כי הפירמידה SABCD היא פירמידה ישרה.

(1) הוכח כי הפירמידה SEFKG היא פירמידה ישרה.

(2) מאיזה סוג המקביליות ABCD ו- EFKG?

3. במשולש ABC התיכונים נפגשים בנקודה M .



נסמן: , .

א. הבע את הווקטור $\vec{AM}$ באמצעות $\overline{u}$ ו- $\overline{v}$ .

ב נתונים שיעורי שלוש נקודות: $C\left(2,0,7\right),B\left(4,1,8\right),A(3,-4,1)$,

(1) הראה שהנקודות לא נמצאות על אותו ישר.

(2) מצא את ההצגה האלגברית של הווקטורים

$\overline{u}$ ו- $\overline{v}$.

(3) בהסתמך על סעיף א' מצא את שיעורי מפגש

התיכונים M של המשולש ABC.

(4) חשב פי כמה גדול שטח המשולש ABC משטח המשולש BMC .

4. במנסרה ישרה הבסיסים הם משולשים שווי



צלעות בעלי צלע שאורכה 3.

אורך המקצוע הצדדי הוא 4.

נסמן: $\vec{AB}=\overline{u} $ , $\vec{AC}=\overline{v}$ , $\vec{AA'}=\overline{w}$.

א. הבע את $\vec{A'C}$ ו- $\vec{A'B}$ בעזרת $\overline{w},\overline{v},\overline{u}$.

ב. חשב את האורכים של $A'C$ ו- $A'B$.

ג. חשב את:

(1) המכפלה הסקלרית: $\overline{u}∙\overline{v}$ .

(2) הזווית $∡BA'C$ .

(3) שטח המשולש $BA'C$.



5. בפירמידה ישרה ABCDS הבסיס ABCD

הוא מלבן. SO הוא גובה הפירמידה.

נתון: 4= AB, 3=BC, 5= SO.

נסמן:  ,  , .

א. הבע את  ואת  בעזרת .

ב. חשב את הזווית .

ג. חשב פי כמה קטן שטח המשולש BOC משטח הפאה SBC.

6. נתונות הנקודות A(-1,-4,1) , B(-2, -3, -3) , C(-3,0,0) , D(2,-7,3) .

א. מדוע הנקודות A, B,C קובעות מישור אחד?

ב. האם הנקודה D נמצאת במישור ABC?

ג. אם הנקודה D נמצאת במישור ABC - האם המרובע ABCD הוא מקבילית?

 אם הנקודה D לא נמצאת במישור ABC – איזה גוף יוצרות הנקודות הנתונות? האם הגוף מסוג ישר?



7.. בתיבה  הבסיס הוא מלבן.

אורך אלכסון המלבן ABCD הוא 5 והזווית החדה

בין אלכסוני המלבן שווה ל- $60°$ . הזווית בין אלכסון התיבה לאלכסון הבסיס  היא 30°.

א. (1) מדוע משולש $BDD'$ *הוא ישר זווית? נמק.*

 *(2) חשב את אורך המקצוע הצדדי של התיבה.*

ב. חשב את נפח התיבה.

ג. פי כמה גדול נפח התיבה מנפח הפירמידה $ABDD'$?



8. במרובע ABCD :

A(2,-4,3), B(4,-8,-3), C(1,-3,-2), D(0,-1,1) .

א. (1) מדוע AB׀׀DC?

 (2) הוכח שהמרובע הוא טרפז ישר זווית.

ב. חשב את שטח הטרפז.

ג. בפירמידה ABCDE

נתון קודקוד E (15,-1,1) .

 (1) הוכח: המקצוע AE בפירמידה ABCDE

 מאונך למישור הבסיס ABCD.

 (2) מצא את נפח הפירמידה.



9. במנסרה  הבסיס 

הוא מקבילית.

נתון: , , , .

א. מצא את שיעורי הקודקוד C.

ב. הוכח כי המנסרה היא תיבה.

ג. חשב את נפח התיבה.



10. בפירמידה מרובעת ABCDS קודקודי הבסיס

הם A(0,0,0), B(4,0,0), C(4,4,0), D(0,4,0),

וקודקוד הראש הוא S(2,2,5).

א. הוכח כי הפירמידה ישרה.

ב. הוכח כי בסיס הפירמידה הוא ריבוע.

ג. מדוע בסיס הפירמידה נמצא במישור xy?

ד. חשב את נפח הפירמידה.



11. בפירמידה ABCD:

A(-1,1,0) , B(0,1,1), C(-4,3,-1), D(0,6,0) .

א. הוכח כי הפירמידה ישרה.

ב. חשב את הזווית BAC  ואת רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC.

ג. מדוע גובה הפירמידה DO מאונך ל- AO ?

ד. חשב את נפח החרוט שבסיסו הוא המעגל החוסם את המשולש ABC וראשו בנקודה D.



12.

נתונה פירמידה ABCDE שבסיסה

מקבילית ABCD הנמצאת במישור xy,

וראשה E הנמצא בנקודה $(0,0,w)$ ,

 $w>0$ *.*

נסמן: $\vec{AD}=\overline{u}$ , $\vec{AB}=\overline{v}$.

נתון: $\overline{u}=(2,3,0)$ , $\overline{v}=(-3,4,0)$,

אורך הווקטור $\vec{BE}$ הוא $\sqrt{57}$.

א. מצא את הזווית בין הווקטורים $\overline{u}$ ו- $\overline{v}$ .

ב. חשב את

 (1) האורך של גובה הפירמידה.

 (2) נפח הפירמידה.

ג. קודקוד הראש של חרוט ישר נמצא בנקודה $S(1,2,w)$ובסיסו במישור xy.

שטח בסיסו שווה לשטח בסיס הפירמידה הנתונה.

לאיזה משני הגופים נפח גדול יותר – לחרוט או לפירמידה? נמק.

ד. חשב את נפח הגליל הישר שגובהו כגובה החרוט, ורדיוס בסיסו שווה לרדיוס בסיס החרוט.

ה. נתון חרוט ישר נוסף שבסיסו נמצא במישור xy ורדיוס בסיסו קטן פי 2 מרדיוס הבסיס של החרוט הראשון (מסעיף ג'). קודקודו של החרוט הנוסף נמצא בנקודה $F(-2,4,2w)$.

האם נפחו של החרוט הנוסף שווה לנפח החרוט הקודם, גדול ממנו או קטן ממנו?

העלה השערה ובדוק את נכונותה.

הערה: אפשר לפצל את התרגיל לשניים או לשלושה.

אפשר לראות בו משימה לימודית המאפשרת כמה דרכי פתרון בשלבים השונים שלה. במשימה קיים דגש על הקשרים בין הנפחים. החל מסעיף ג' , אפשר לבצע את כל החישובים ללא ידיעת רדיוס הבסיס, אם מתייחסים לקשרים בין הנפחים. תלמיד שמתקשה בקשרים אלה יכול להשתמש בחישוב רדיוס.

1. לאו דווקא ישרה [↑](#footnote-ref-1)